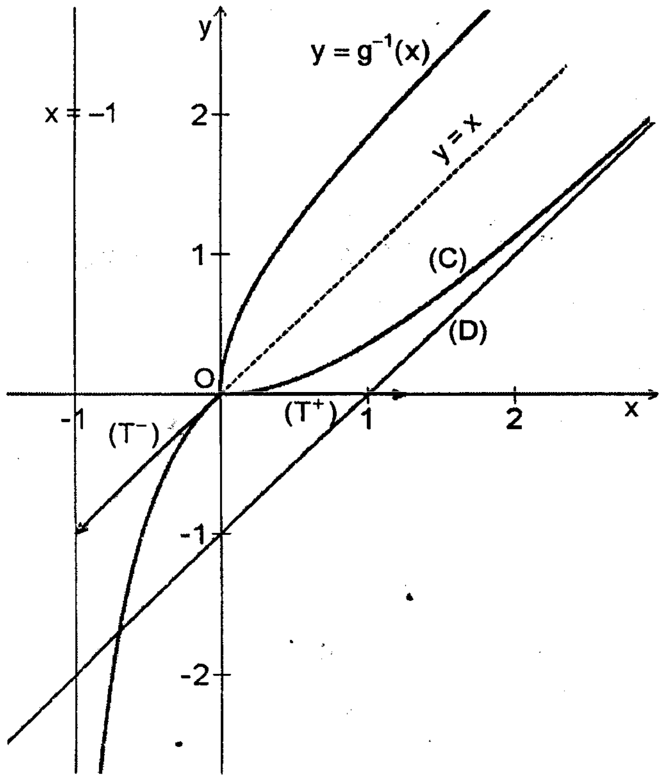
4-) Tracés de (C) et (D)



5.a) A (α) = $\int_1^{\alpha}(f(x) - (x-1)\,dx$. 4cm^2

A (α) = $[-e^{-x}]_1^{\alpha}$. 4cm2 = 4 (e^{-1}-e^{-} α) Cm^2

b) lim A (α) = lim 4 (e^{-1}-e^{-} α) Cm^2 = 4e^{-1}cm^2

α →+ ∞ α →+ ∞

6.a soit n ∈ N : $U_N = \int_n^{n+1}[f(x) - (x-1)]dx$

$U_N = \int_n^{n+1} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_n^{n+1}$ = - e^{-n-1} + e^{-n}

UN = (1-e^{-1}) e^{-n}

b) soit n ∈ N : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(1-e^{-1})e^{-n-1}}{1-e^{-1})e^{-n}}$ = e^{-1}

donc (Un) n ∈ N est une suite géométrique de raison

$q = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et de premier terme $U_0 = 1-e^{-1}$

7-a) D'après la variation de f, la restriction g de f à l'intervalle [0, +00 [est continue et strictement croissante sur [0, +00 [. II en résulte que g est une bijection de [0, +00 [sur g([0, +00 [) [0, +00 [. g admet donc une fonction réciproque g.

b) La courbe représentative de g'-1 se déduit de celle de g par symétrie, par rapport à la droite d'équation y = x.

Voir la représentation graphique de g1 sur le repère précédent.

NEPER (ou NAPIER) John, écossais, 1550-1617

Neper est plus connu pour son invention' des logarithmes (le terme est de lui, du grec logos = logique, raison et arithmos = nombre) qu'il explique dans deux traités : Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (1614), ptis Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio (posthume, 1619) soit : Description (resp., Construction) de la Règle Admirable des Logarithmes. L'objectif était de simplifier les calculs trigonométriques de l'astronomie (trigonométrie sphérique) en remplaçant les multiplications et divisions par des additions et soustractions.

Le logarithme népérien, également dit naturel, voir hyperbolique depuis Euler, autrefois noté Log, est noté aujourd'hui in (logarithme népérien)

Vérifie pour tout x > 0

$\text{Ln } x = \int_{1t}^{x1} -dt$

Ainsi relié au calcul intégral, il est étudié en classes terminales des lycées. C'est à Euler que l'on doit cette écriture pressentie par N. mercator.

L'unique et célèbre réel e tel que in e = 1, donc base de ces logarithmes (Ln = log0) fut appelé nombre e Neper. Dans un repère orthonormal, ln x apparait donc comme l'aire sous l'hyperbole équilatère d'équation y = 1/x

EXERCICE I

1- Résoudre dans C l'équation: $z^2 - (1 + i) z + 2 + 2i = O$.

2- Dans le plan Complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité 1 cm), on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives:

Z_A 1+I $\quad$ Z_B =1- i; Z_C =2i et Z_D = 4 +6i

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Ecrire l'expression complexe de la similitude directe S telle que 8(D) = A et 5(C) = B.

c) Donner les éléments Caractéristiques de la similitude S.

3- A tout point M d'affixe z (M # D), on associe le point M_1 d'affixe Zi tel que:

$Z1 = \frac{2Z-4i}{z-4-6i}$

a) Montrer que $0M_1 = \frac{2CM}{DM}$

b) Déterminer et représenter graphiquement les ensembles (Γ) et (Γ') tels que:

- (Γ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que: 121 I = 2.

- (Γ') est 'image de (F) par la similitude S.

EXERCICE 2

Une urne contient 2 boules rouges et 4 boules vertes. Les boules rouges portent respectivement les numéros 0 et 1 les boules vertes portent respectivement les numéros 2, 3, 4 et 5. L'épreuve (E) consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne; on appelle « succès » l'obtention de 3 boules de même couleur.

1- On effectue une fois l'épreuve (E).

Calculer la probabilité de Chacun des événements suivants

A : « avoir un succès »

B: « avoir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6»

2- A chaque épreuve (E), on désigne par X la variable aléatoire réelle qui prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les 3 boules tirées.

a) Donner l'univers-image de X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

3- On répète n fois de suite, d'une manière indépendante l'épreuve (E). On note l'événement:

« Obtenir au moins un succès lors des n épreuves (E) »

a) Calculer la probabilité P_n de l'événement A_n.

b) Déterminer le nombre minimum d'épreuves (E) qu'on doit effectuer pour que $P_n > 0,99$.

On donne: ln= $\frac{5}{4}$ 0,22, ln 10= 2,30.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur)]0, + ∞ [par: $f(x) = \frac{e}{x} + \frac{\ln X}{x^2}$ où e désigne le nombre réel base des logarithmes népériens.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ tel que

$[, \vec{\imath}]$ =2 cm et $[, \vec{\jmath}] = 1$cm

1- On considère la fonction g définie sur) 0, +00 par: g(x) = - 2lnx - xe + 1.

a) Donner le sens de variation de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle] $\frac{1}{2}$[.

o) En déduire que, pour tout x ∈] 0, α [, g(x) >0 et pour tout x ∈] α ; + ∞ [g(x) < 0. 1

d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha\, e}{2\alpha^2}$

2-a) Calculer les limites de f en 0 et on + ∞.

b) Calculer la dérivée f'(x)4de la fonction f et vérifier que pour tout x ∈]0, +∞[

c) Dresser le tableau de variation de f,

3- Tracer là courbe (C) en précisant les branches infinies.

On prendra ln2 0,69; e = 2,71 ; α = 0,67 et f(α) = 3,16 pour la construction.

4- Pour n ∈ N, on pose ln = $\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln X}{X^2}$ dx. Et An = $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : ln = $\frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$

b) Montrer que An = ln + e.

e) Calculer en cm2 l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et es droites d'équations respectives: x = 1 et X = e.

CORRIGE

EXERCICE 1

1) résolution de l'équation : $Z^2 – (1+i)Z+2+2i = 0$

$\Delta = - 8 - 6i$

Soit $\sigma = x + yi$ une racine carrée de $\Delta = -8 - 6i$, on a :

$$\begin{cases} x^2 - \quad y^2 = -8 \\ x^2 + \quad y^2 = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Il résulte : $\sigma = 1 - 3i$ ou $\sigma = -1 + 3i$

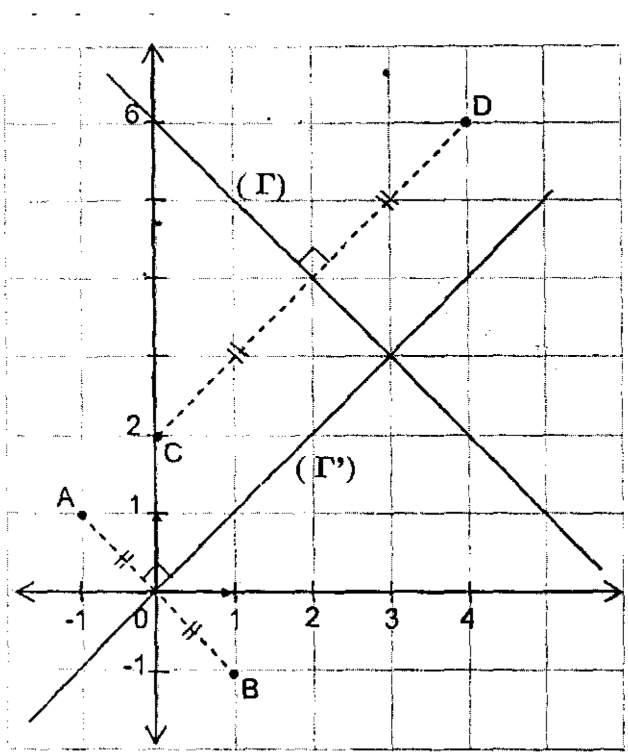
$Z' = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$

$Z'' = \frac{1+i+1-3i}{2} = 2i$

L'ensemble des solutions est S = {2i ; 1-i}

2.a) Placement des points A [-1 + i], B[1-i}

C [2i] et D [4+6i]



b. Expression complexe de S.

z' = az +b, où a, b ∈C

$\begin{cases} S(D) = A \\ S(C) = B \end{cases}$ équivalent $\begin{cases} az_D + b = \ Z_A \\ az_C + b = Z_B \end{cases}$

Donc

$\begin{cases} (4+6i)a + b = \ -1 + i \\ \ 2ia + b = 1 - j = Z_B \end{cases}$

Il résulte a = $\frac{1}{2}$i et b = 2 –i

D'où z' = $\frac{1}{2}iz + 2 - i$

c) Eléments caractéristiques de C

centre Ω : Z Ω = $\frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1-\frac{1}{2}i}$ = 2

rapport k = $|a|$ = $\left|\frac{1}{2}i\right|$ = $\frac{1}{2}$

angle θ = arg(a) = arg ($\frac{1}{2}$i) = $\frac{\pi}{2}$

3) M(Z); M1 [Z1]; C [2i] et D [4+6i]

Z1 = $\frac{2z-4i}{z-4-6i}$

a) OM1 = $|Z_1|$= $\left|\frac{2z-4i}{z-4-6i}\right| = \frac{2\,[z-2i]}{|z-4-6i|} = \frac{2CM}{DM}$
b) [Γ] = {M [z] tel que $|Z1| = 2$}

$|Z_1| = \frac{2CM}{DM}$ = 2 équivaut à CM = DM

[Γ) est la médiatrice du segment [CD]

(Γ) = S(Γ)

On sait que S(C) = B et S(D) = A, donc (Γ) est la médiatrice du segment [AB]

Voire les tracés de (Γ) et (Γ′) sur la figure ci-contre.

EXERCICE 2

Une urne contient :

- Deux boule rouge : 0-1
- Quatre boules vertes : 2-3-4-5

(E) : Tirage simultané de 3 boules de l'urne « succès » : obtention de 3 boules de meme couleur.

1) calcul de probabilité

A : « avoir un succès »

« obtenir 3 boules vertes parmi 4 »

P(A) $\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

B : « avoir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6 »

0,1,5 ou 0,2,4 ou 1,2,3

P(B) $\frac{C_1^1C_1^1C_1^1+C_1^1C_1^1C_1^1+C_1^1C_1^1C_1^1}{C_6^3} = \frac{3}{20}$

2-) X = le plus grand des numéros portés sur les trois boules.

a) Univers image de X

b) Loi de probabilité de X

- (X = 2): «obtenir (1 numéro 2 parmi 1) et (2 numéros strictement inférieurs à 2 parmi 2) »

P(X = 2) = $\frac{C_2^1C_3^2}{C_6^3} = \frac{1}{20}$

- (X = 3): ((obtenir (1 numéro 3 parmi 1) et (2 numéros strictement inférieurs à 3 parmi 3) »

P(X = 3) = $\frac{C_1^1C_3^2}{C_6^3} = \frac{3}{20}$

- (X = 4): « obtenir (1 numéro 4 parmi 1) et (2 numéros strictement jnférieurs à 4 parmi 4)»

P(X = 4) = $\frac{C_1^1C_4^2}{C_6^3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

- (X = 5): «obtenir'(1 numéros parmi 1) et(2 numéros strictement inférieurs â 5 parmi 5) »

P(X = 5) = $\frac{C_1^1C_5^2}{C_6^3} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

x	2	3	4	5
P(x = x)	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

3-) On répète n fois de suite, d'une manière indépendante 'épreuve (E).

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et

p = P(A) = $\frac{1}{5}$ la probabilité du succès.

e) Calcul de la probabilité de l'événement:

« Obtenir au moins un succès lors des n épreuves (E)))

Pour cela considérons l'événement contraire $\overline{A_n}$; de An

$\overline{A_n}$: obtenir zéro succès lors des n épreuves(E) »

$P(\overline{A_n}) = C_n^0$ (P(A)0 (1 – P(A))n = $\left(\frac{4}{5}\right)^n$

D'où Pn = $P(\overline{A_n})$= 1- $P(\overline{A_n})$ = 1 - $\left(\frac{4}{5}\right)^n$

b) Pn = 1 - $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ > 0,99

0,01 > $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ou encore $10^{-2} > \left(\frac{4}{5}\right)^n$

D'où -2ln10 > nln $\left(\frac{4}{5}\right)$

n > $\frac{2\ln 10}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{2.2,30}{0,22} = 20,91$

donc le nombre minimum d'épreuves (E) est égal à n = 21 pour que Pn > 0,99

<u>PROBLEME</u>

1) g(x) = -2 lnx – xe +1

<u>a) Sens de variation de g</u>

pour tout x > 0 g'(x) = $\frac{-2}{x} - e < 0$

b) g $\left(\frac{4}{5}\right)$ = -2ln $\frac{1}{2} - \frac{e}{2} + 1 \approx 1,03 > 0$

g(1) = -2ln1 –e + 1 ≈ -1,7 < 0

g est continue et strictement croissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et

$g(\frac{1}{2})\, g(1) < 0$, il existe donc un réel unique

$\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$

Autrement dit l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$

c) g étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ on a alors :

pour $x \in]0, \alpha[$ $g(x) > g(\alpha)$, soit $g(x) > 0$

pour $x \in]0, +\infty[$ $g(x) < g(\alpha)$, soit $g(x) < 0$

d) $f(x) = \frac{e}{x} + \frac{\ln X}{x^2}$

$f(x) = \frac{e}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha^2}$

or $g(\alpha) = -2\ln\alpha - \alpha e + 1 = 0$

donc $\ln\alpha = \frac{1-\alpha e}{2}$

d'où $f(\alpha) = \frac{e}{\alpha} + \frac{\frac{1-\alpha e}{2}}{a^2} = \frac{2\alpha e+1-\alpha e}{2\alpha^2} = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

2) $f(x) = \frac{e}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha^2}$

a) lim (fx) $(\frac{ex+lnx}{x^2}) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

x →+ 0^+ x →+ 0^+

lim f(x) = lim $(\frac{e}{x} + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}) = 0+0.0 = 0$

x →+ ∞ x →+ ∞

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{-e}{X^2} + \frac{\frac{1}{X}X^2 - \ln x\, 2x}{x^4} = \frac{-2+1-2lnx}{X^3}$

$f'(X) = \frac{-2\ln x - xe + 1}{X^3} = \frac{g(x)}{X^3}$

f' (X) a le meme signe que g(x)

c) Tableau de variation de f.

x	0		α		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)	−∞	↗	$\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$	↘	0

3) Branches infinies de (C)

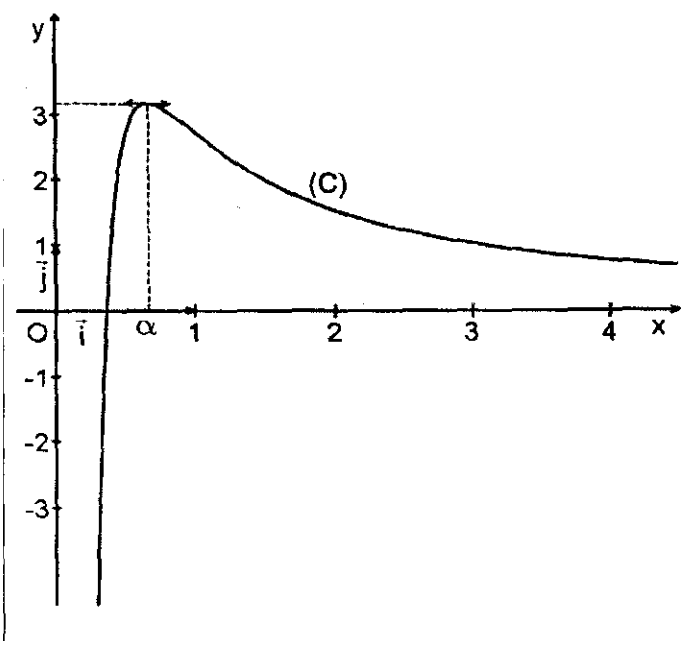
Lim f(x) = - ∞ : la droite d'équation x = 0 est une $x \to 0^+$

Asymptote verticale à la courbe (C)

Lim f(x) = 0 : la droite d'équation y = 0 est une $x \to 0^+$

Asymptote horizontale à la courbe (C)

Tracé de (C)



4)a. Calcul de In = $\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{lnX}{x^2}\,dx$

Intégrons par parties, pour cela posons :

U' (x) = $\frac{1}{x^2}$ et v(x) = lnx

U(x) = $\frac{1}{x}$ et v'(x) = $\frac{1}{x}$

In = $|\left[\frac{-lnx}{x}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{x^2}\,dx$

= $\left[\frac{-lnx}{x}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} + \left[\frac{1}{x}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$

b) An = $\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{e}{x}\,dx + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{lnX}{x^2}\,dx = \left(\frac{e}{x} + \frac{lnX}{x^2}\right) I_n$

= $\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{e}{x}\,dx + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{lnX}{x^2}\,dx$ = $[elnx]_{e^n}^{e^{n+1}}$ In

An = e +In

c) L'aire A demandée correspond à A_0 2cm^2

A = e + I0 = $\left(2 + 2e - \frac{4}{e}\right)$ cm^2

1- Epreuve de Bernoulli

Soit A un événement quelconque puis fixé issu d'une expérience aléatoire donnée.

Désignons par p et q les probabilités respectives de A et $\bar{A}$.

(0 $\leq$ p $\leq$ et q = 1-p)

Lorsque l'on ne s'intéresse qu'à la réalisation (ou non) de l'événement A, nous disons que de telle expérience est dite « Epreuve de Bernoulli ». Convenons alors d'appeler:

Succès (S) l'évènement « A est réalisé » et Echec $\bar{S}$ l'évènement «A n'est pas réalisé »

2-Schéma de Bernoulli

- Répétons n fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve de Bernoulli précédente. Nous disons que cette nouvelle épreuve est appelée « Schéma de Bernoulli de paramètres n et p» La probabilité Pk d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves est

Pk = C_n^k p^k q^{n-k}, avec $0 \leq k \leq n$

<u>Remarque :</u> L'événement « obtenir k succès au cours de ces n épreuves » est identique à l'évènement « A est réalisé exactement k fois au cours de ces n épreuves .»

3- Loi binomiale

- Répétons n fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve de Bernoulli précédente.

Modèle 1:

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus.

Modèle 2

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisation de A.

Modèle 3

Si A est réalisé, on marque 1 point, sinon on marque

Soit Y la variable aléatoire égale au total de points obtenu.

On dit que Y suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Univers image de Y:

Y(Ω) = (0,1,2,3 ….n}

Loi de probabilité de Y

Pour tout k ∈{0,1, 2, 3,..., n)

P(Y=k) = C_n^k p^k q^{n-k}

Espérance mathématique: E(Y) = np

Variance: V(Y) = np

EXERCICE I

le polynôme P à variable complexe z défini par: P(z) = z3 + (1 + i)z2 + (4- i)z – 6i + 12. Calculer P(-3i).

b) Montrer que l'équation P(z) = O admet une solution réelle oc que l'on déterminera.

c) Déterminer le nombre complexe tel que P(z) peut s'écrire sous la forme:

P(z) = (z + Si) (z + 2) (z + β).

d) Résoudre dans C l'équation P(z) = O.

2- Dans le plan complexe (C) muni d'un repère orthonormé (0, $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B, C d'affixes respectives ZA = -3i   ZB = -2 et   ZC = 1 + 21. Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ et $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

3- Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ecrire l'expression complexe de la rotation r.

4- On considère la transformation S du plan (C) dans (C) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que S: z' = 2iz - 2 + 4i.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation h telle que r o h = S.

EXERCICE 2

Un sac contient six jetons, portant les lettres A, B, C et D dont la répartition suivant les couleurs est donnée par le tableau ci-dessous:

Lettres / Couleurs	A	B	C	D
Rouge	0	1	1	0
Jaunes	1	0	0	1
Noires	1	1	0	0

Chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

I- On tire au hasard et successivement sans remise trois jetons du sac.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

E: « obtenir exactement un jeton rouge »

F: « obtenir dans l'ordre, les lettres B, A, C »

2. Soit X la variable aléatoire associée au rang de la première consonne sortie.

a) Déterminer l'univers-image de X.

b) Etablir la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E(X) de X

II. Une épreuve (E) consiste à tirer simultanément trois jetons du sac.

1) Calculer la probabilité de l'événement : G : « obtenir les lettres du mot B A C »

2) On répète trois fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve (E).

A chaque épreuve, on marque 1 point si l'événement G est réalisé, sinon on marque O point.

Soit Y la variable aléatoire égale au total des points obtenus à l'issue des trois épreuves.

a) Préciser l'univers-image de Y et déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer l'espérance mathématique E(Y) de Y puis la variance V(Y) de Y.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} + x$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

I- Soit g la fonction numérique définie sur IR par : $g(x) = 1 - (x-1)^2 e^{-x}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ en admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer la dérivée $g'(x)$ de g pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) Dresser le tableau de variation de g.

e) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II-1- a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

2- a) Montrer que le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.

b) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$.

d) Etudier la branche infinie de $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

e) Tracer (T), (Δ) et $(\mathscr{C})$.

3- a) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$.

b) En déduire l'aire géométrique $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

On donne : $e \simeq 2{,}7$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e} \simeq 0{,}4$

CORRIGE

EXERCICE 1

1-) $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z - 6i + 12$.

a) Calcul de $P(-3i)$

$P(-3i) = (-3i)^3 + (1+i)(-3i)^2 + (4-i)(-3i) - 6i + 12$

$= 27i - 9i - 12i - 6i - 9 - 3 + 12 = 0$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$P(\alpha) = 0$ si et seulement si

$\alpha^3 + (1+i)\alpha^2 + (4-i)\alpha - 6i + 12 = 0$

$\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 12 + (\alpha^2 - \alpha - 6)i = 0$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 12 = 0 & (1) \\ \alpha^2 - \alpha - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) il résulte : $\alpha = -2$ ou $\alpha = 3$

Pour $\alpha = -2$: (1) devient $-8+4-8+12 = -16+16 = 0$

Pour $\alpha = 3$: (1) devient $27+9+12+12=60 = 0$
(égalité impossible)

Donc $\alpha = -2$ est une solution réelle de l'équation $P(z) = 0$.

c) $P(z) = (z+3i)(z+2)(z+\beta)$

$P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z - 6i + 12$

Par identification des polynômes, nécessairement on a $3i \cdot 2 \cdot \beta = -6i + 12$

Donc $\beta = \dfrac{-6i + 12}{6i} = -1 - 2i$

D'où $P(z) = (z+3i)(z+2)(z+(-1-2i))$

d) Résolution de l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z - 6i + 12 = 0$

équivaut à

$P(z) = (z+3i)(z+2)(z+(-1-2i)) = 0$

équivaut à $z = -3i$ ou $z = -2$ ou $z = 1 + 2i$

L'ensemble des solutions est

$S = \{-3i\ ;\ -2\ ;\ 1 + 2i\}$

2-) $A[z_A = -3i]$; $B[z_B = -2]$; $C[z_C = 1 + 2i]$

$\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{1+2i+2}{-3i+2} = \dfrac{3+2i}{2-3i} = i$

- $\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

- $\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1$

Il résulte que $\dfrac{BC}{BA} = 1$, donc $BC = BA$

- D'où (ABC) est un triangle isocèle et rectangle en B.

3-) Expression complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$z' = az + b$ avec

$a = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$

$b = (1-a)z_B = (1-i)\cdot(-2) = -2 + 2i$

D'où $z' = iz - 2 + 2i$

4-a) S ; $M[z] \to M'[z']$ tel que $z' = 2iz - 2 + 4i$

z' est de la forme $z' = az + b$ avec

$a = 2i$ et $b = -2 + 4i$

$|a| = |2i| = 2 \neq 1$. Donc S est une similitude plane directe de rapport $k = |a| = 2$.

Centre Ω : $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-2+4i}{1-2i} = -2 = z_B$

Angle $\theta = \arg(a) = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$.

S est la similitude plane directe de centre B, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Soit h la transformation telle que $r \circ h = S$.

En composant à gauche par r^{-1} chaque membre de cette égalité, on obtient :

$h = r^{-1} \circ S = \mathscr{S}\left(B, 1, \dfrac{-\pi}{2}\right) \circ \mathscr{S}\left(B, 2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= \mathscr{S}\left(B, 1 \times 2, \dfrac{-\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= \mathscr{S}(B, 2, 0) = \mathscr{H}(B, 2)$

h est donc l'homothétie de centre B et de rapport 2.

<u>Remarques :</u>

- Toute rotation R e centre Ω et d'angle est une similitude plane directe de rapport 1, de centre Ω et d'angle et réciproquement.
- Toute homothétie H de centre Ω et de rapport $k > 0$ est une similitude plane directe de rapport k, de centre Ω et d'angle 0 et réciproquement.
- Toute homothétie H de centre Ω et e rapport $k < 0$ est une similitude plane directe de rapport $-k$, de centre Ω et d'angle et réciproquement

Exercice 2

I- Tirage au hasard et successif sans remise de trois jetons parmi six.
Un tirage possible est un arrangement de 3 jetons parmi 6.

Le nombre de tirages possibles est égal à $A_6^3 = 120$

1-) Calcul de probabilités

- E : « obtenir exactement un jeton rouge »

« obtenir 1 jeton rouge et 2 jetons non rouges pris dans le désordre »

$R, \overline{R}, \overline{R}$ ou $\overline{R}, \overline{R}, R$ ou $\overline{R}, R, \overline{R}$

$$P(E) = 3 \cdot \frac{A_2^1 \cdot A_4^2}{A_6^3} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{5}$$

- F : « obtenir dans l'ordre, les lettres B, A, C »

$$P(F) = \frac{A_2^1 \cdot A_2^1 \cdot A_1^1}{A_6^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{30}$$

Remarque *: autre solution, avec probabilité conditionnelle*
Notons B l'événement « la 1ère lettre tirée est B »,
A l'événement « la 2nde lettre tirée est A »
et C l'événement « la 3ème lettre tirée est C »

$$P(F) = P(B \text{ et } A \text{ et } C)$$
$$= P(B) \times P(A / B) \times P(C / B \text{ et } A)$$
$$= \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$$

2-) X = rang de la première consonne sortie.

a) Univers-image de X

Comme il n'y a que deux voyelles, chaque tirage comporte au moins une consonne, donc

$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

b) Loi de probabilité de

- (X = 1) : « la première consonne sortie est au premier tirage »

« obtenir dans l'ordre une consonne et deux lettres »

$$P(X = 1) = \frac{A_4^1 A_5^2}{A_6^3} = \frac{2}{3}$$

- (X = 2) : « la première consonne sortie est au second tirage »

« obtenir dans l'ordre une voyelle – une consonne et une lettre »

$$P(X = 2) = \frac{A_2^1 A_4^1 A_4^1}{A_6^3} = \frac{4}{15}$$

- (X = 3) : « la première consonne sortie est au troisième tirage »

« obtenir dans l'ordre deux voyelles et une consonne »

$$P(X = 3) = \frac{A_2^2 A_4^1}{A_6^3} = \frac{1}{15}$$

x	1	2	3
P(X=x)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

Espérance mathématique E(X) de X.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{21}{15} = 1{,}40$$

II- Epreuve (E) : tirage simultané de trois jetons du sac.
Un tirage possible est une combinaison de 3 jetons parmi 6.
Le nombre des tirages possibles est égal à

$C_6^3 = 20$

1-) Calcul de probabilité

G : « obtenir les lettres du mot B A C »

$$P(G) = \frac{C_2^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{20} = \frac{1}{5}$$

2-) On répète trois fois de suite et d'une manière indépendante l'épreuve (E).
A chaque épreuve, on marque 1 point si l'événement G est réalisé, sinon on marque 0 point.
Soit Y la variable aléatoire égale au total des points obtenus à l'issue des trois épreuves.

a) Y suit la loi binomiale de paramètres

n = 3 et $p = P(G) = \frac{1}{5}$

Univers image de Y

$Y(\Omega') = \{0, 1, 2, 3\}$.

Loi de probabilité de Y

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(Y = k) = C_3^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{3-k}$$

k	0	1	2	3
P(Y=k)	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

b) Espérance mathématique E(Y) de Y

$E(Y) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}60$

Variance V(Y) de Y

$V(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}48$

PROBLEME

I- $g(x) = 1-(x-1)^2 e^{-x}$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{-x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$

$= 1 - 0 - 0 + 0 = 1$

c) Pour tout $x \in IR$:

$g'(x) = -2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2 e^{-x}$

$g'(x) = (x-1)(x-3)e^{-x}$

d) Tableau de variation de g

$g'(x)$ a le même signe que $(x-1)(x-3)$ car $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	1	↘	$1-4e^{-3}$	↗	1

e) • $g(0) = 1 - 1 = 0$

• Signe de g(x)

- Pour $x \in]-\infty, 1[$:

g étant croissante sur $]-\infty, 1[$ et $g(0) = 0$, on a :

si $x < 0$: $g(x) < g(0)$ donc $g(x) < 0$

si $0 < x < 1$: $g(0) < g(x)$ donc $g(x) > 0$

- Pour $x \in [1, +\infty[$:

l'examen du tableau de variation de g nous permet de conclure que $g(x) \geq 1-4e^{-3}$.

Or $1-4e^{-3} > 0$, donc $g(x) > 0$.

II-1-) $f(x) = (x^2+1)e^{-x} + x$

a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)\left(e^{-x} + \frac{x}{x^2+1}\right)$

$= (+\infty)(+\infty + 0) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} + x\right)$

$= (0 + 0 + \infty) = +\infty$

b) Pour tout $x \in IR$:

$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} + 1$

$= 1 - (x^2 - 2x + 1)e^{-x} = 1 - (x-1)^2 e^{-x}$

$= g(x)$

Donc $f'(x) = g(x)$.

$f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2-a) Pour tout $x \in IR$: $f''(x) = g'(x)$.

Comme $f''(1) = g'(1) = 0$ et que $f''(x)$ change de signe lorsque x traverse 1 (question I- d)), le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.

b) Equation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x + 2e^{-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0 + 0 = 0$

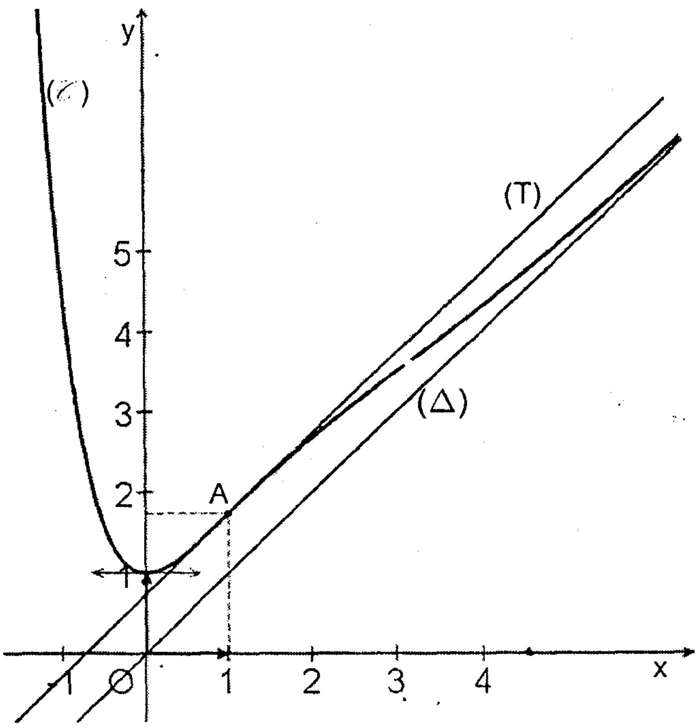
Donc la droite (Δ) : $y = x$, est une asymptote oblique de la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)e^{-x} + 1$

$= (-\infty)(+\infty) + 1 = -\infty$

Lorsque $x \to -\infty$, la courbe $(\mathscr{C})$ a une branche infinie parabolique suivant l'axe (y'Oy).

e) Tracés de (T), (Δ) et $(\mathscr{C})$.



3-a) Calcul de $I = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

Posons :

$u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x^2$

$u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 2x$

$$I = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x e^{-x}\,dx$$

Posons :

$u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = 2x$

$u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 2$

$$I = -e^{-1} + \left[-2x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$I = -e^{-1} + \left[-2xe^{-x}\right]_0^1 + \left[-2e^{-x}\right]_0^1 = 2 - 5e^{-1}$$

REMARQUE METHODOLOGIQUE

Théorème (Intégration par parties) :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I.

Si a et b sont deux éléments de I, alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx \quad (1)$$

ou

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \quad (2)$$

Dans cet ouvrage, pour raison de commodité, on utilise la formule (1).

L'intégration par parties permet de calculer des primitives des fonctions telles que :

Exemples 1 :

$x \to x\ln(x+1)$

$x \to (x+1)^2 \ln x$

$x \to \dfrac{\ln x}{x^2} \quad \left(= \dfrac{1}{x^2}\ln x\right)$

On pose respectivement :

$u'(x) = x$ *et* $v(x) = \ln(x+1)$

$u'(x) = (x+1)^2$ *et* $v(x) = \ln x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *et* $v(x) = \ln x$

Exemple 2 :

$x \to (ax+b)^n e^{\alpha x+\beta}$, *avec* $a\alpha \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $u'(x) = e^{\alpha x+\beta}$ *et* $v(x) = (ax+b)^n$

b) D'après le graphique ci-contre, la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle [0, 1], donc

$$\mathscr{A} = \left(\int_0^1 (f(x) - x)dx\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(\int_0^1 \left(x^2 e^{-x} + e^{-x}\right)dx\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(I + \int_0^1 e^{-x}dx\right)\text{cm}^2$$

$$\mathscr{A} = \left(3 - 6e^{-1}\right)\text{cm}^2 \simeq 0{,}80\,\text{cm}^2$$

----------ooo0ooo---------

EXERCICE 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1-3i)z-4=0$.

2) a) Dans le plan complexe (P), muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm, placer les points A, B et D d'affixes respectives 1, $(-1-i)$ et $(2-2i)$ ainsi que le point C milieu du segment [BD] dont on précisera l'affixe.

b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $\left|\dfrac{z+1+i}{z-2+2i}\right|=1$.

c) Montrer que (Δ) passe par A. Achever alors la construction de (Δ).

3) On considère la similitude plane directe S définie par : $\begin{cases} S(B)=B \\ S(A)=D \end{cases}$

Préciser les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE 2

A- On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On lance une fois le dé. Calculer la probabilité d'avoir un nombre strictement supérieur à 2.
2) Maintenant, on lance deux fois de suite ce dé. Une éventualité est un couple d'entiers naturels (a,b). On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque couple (a,b) obtenu, associe le réel $|a-b|$.
   a) Déterminer l'univers image de X.
   b) Etablir la loi de probabilité de X.

B- Lors d'un test, les notes obtenues par 4 candidats, aux épreuves de chant et de musique, sont indiquées dans le tableau suivant :

Musique (x_i)	α	3	6	9
Chant (y_i)	2	4	5	β

1) On sait que le point moyen associé à cette série statistique a pour coordonnées $\overline{x}=5$ et $\overline{y}=4,5$; déterminer les notes α et β respectivement obtenues par deux candidats différents en musique et en chant.
2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interpréter le résultat obtenu.
3) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

PROBLEME

I) g est la fonction numérique définie et continue sur]0, +∞[par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g sur]0, +∞[.

2) Montrer qu'il existe un réel unique α dans]0, +∞[tel que g(α) = 0.

3) Etudier le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

II) On considère maintenant la fonction numérique f définie sur]0, +∞[par

$$f(x) = (x+1) - \left(\frac{1+\ln x}{x}\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout réel x de]0, +∞[où f' est la fonction dérivée de f .

b) En déduire que f'(x) a le même signe que g(x) pour tout réel x de]0, +∞[.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de]0, +∞[.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique de $(\mathscr{C})$.

b) Déterminer l'abscisse de A, point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec (Δ).

4) Tracer (Δ) et $(\mathscr{C})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Pour construire, on prendra $\frac{1}{e} = 0{,}4$; α = 0,6 et f(α) = 0,8).

5) Calculer l'intégrale I définie par $I = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

CORRIGE

EXERCICE 1

1-) Résolution de l'équation : $z^2 - (1-3i)z - 4 = 0$.

$\Delta = 8 - 6i$

Soit $\delta = x + yi$ une racine carrée de $\Delta = 8 - 6i$, on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = 10 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Il résulte : $\delta = 3 - i$ ou $\delta = -3 + i$

$$z' = \frac{(1-3i)+(3-i)}{2} = 2 - 2i$$

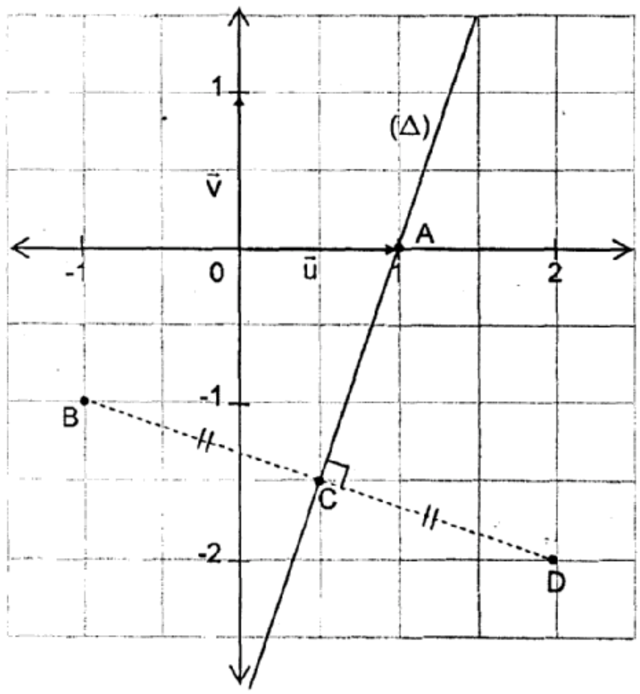
$$z'' = \frac{(1-3i)-(3-i)}{2} = -1 - i$$

L'ensemble des solutions est $S = \{2 - 2i \ ; \ -1 - i\}$

2-a) Soit C le milieu de [BD] ; on a :

$$z_C = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{-1-i+2-2i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$$

Placement des points $A[1]$; $B[-1-i]$; $D[2-2i]$ et $C\left[\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right]$ dans le plan (P)



b) $M[z]$; $B[-1-i]$; $D[2-2i]$

$M \in (\Delta)$ équivaut à

$$\left|\frac{z+1+i}{z-2+2i}\right| = \left|\frac{z-(-1-i)}{z-(2-2i)}\right| = \frac{BM}{DM} = 1$$

équivaut à $BM = DM$

(Δ) est la médiatrice du segment [BD]

c) $BA = |1-(-1-i)| = |2+i| = \sqrt{5}$

$DA = |1-(2-2i)| = |-1+2i| = \sqrt{5}$

$BA = DA$ donc $A \in (\Delta)$

c'est-à-dire (Δ) passe par A.

Voir le tracé de (Δ) sur la figure ci-contre

3-) <u>Eléments caractéristiques de S</u> :

De la relation $\begin{cases} S(B) = B \\ S(A) = D \end{cases}$ on a :

B est le centre de la similitude plane directe S

S a pour rapport :

$$k = \frac{|z_D - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{|3-i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

L'angle de S est

$$\theta = mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg\left(\frac{3-i}{2+i}\right)$$

$$= \arg(1-i) = \frac{-\pi}{4}$$

EXERCICE 2

A- On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- Puisque le dé est bien équilibré, chaque face a la même probabilité d'apparition.

1-) On lance une fois le dé.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Soit l'événement E : « avoir un numéro strictement supérieur à 2 »

$E = \{3, 4, 5, 6\}$

$$P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2-) On lance deux fois de suite le dé.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\Omega' = \{(1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; \ldots ; (6,6)\}$

$Card(\Omega') = 36$

Comme tous les événements élémentaires sont équiprobables, les calculs de probabilité qui suivent utilisent la formule $P(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}$

$$X : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a,b) \longrightarrow X(a,b) = |a-b|$$

a) Univers image de X :

$X(\Omega') = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) Loi de probabilité de X :

- $(X = 0) = \{(1,1) ;(2,2) ;(3,3) ;(4,4) ;(5,5) ;(6,6)\}$

$P(X = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $(X = 1)$
$= \{ (1,2) ;(2,1) ;(2,3) ;(3,2) ;(3,4) ;(4,3) ;(4,5) ;(5,4) ; (5,6) ;(6,5) \}$

$P(X = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

- $(X = 2)$
$= \{(1,3) ;(3,1) ;(2,4) ;(4,2) ;(3,5) ;(5,3) ;(4,6) ;(6,4)\}$

$P(X = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

- $(X = 3) = \{(1,4) ;(4,1) ;(2,5) ;(5,2) ;(3,6) ;(6,3)\}$

$P(X = 3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $(X = 4) = \{(1,5) ;(5,1) ;(2,6) ;(6,2) \}$

$P(X = 4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- $(X = 5) = \{(1,6) ;(6,1)\}$

$P(X = 5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

x	0	1	2	3	4	5
P(X= x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

B- 1-) Détermination de α et β

Musique (x_i)	α	3	6	9
Chant (y_i)	2	4	5	β

$$\bar{x} = \frac{\alpha+3+6+9}{4} = 5 \text{ donc } \alpha = 2$$

$$\bar{y} = \frac{2+4+5+\beta}{4} = 4,5 \text{ donc } \beta = 7$$

2-) Calcul du coefficient de corrélation linéaire r de la série (x,y)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
	2	2	4	4	4
	3	4	9	16	12
	6	5	36	25	30
	9	7	81	49	63
Σ	20	18	130	94	109

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$Cov(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_i y_i) - (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{109}{4} - 5 \cdot 4,5 = 4,75$$

$$V(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{130}{4} - 5^2 = 7,50$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{7,50} = 2,74$$

$$V(y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{94}{4} - (4,5)^2 = 3,25$$

$$\sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{3,25} = 1,80$$

$$\text{D'où } r = \frac{4,75}{2,74 \cdot 1,80} \simeq 0,96$$

La corrélation est très forte entre la musique et le chant. On peut donc effectuer un ajustement affine entre y et x par la méthode des moindres carrés.

3-) Equation de la droite (D) de régression de y en x

(D) : $y = ax + b$ où

$$a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = \frac{4,75}{7,50} = \frac{19}{30}$$

(D) passe par le point moyen G(5; 4,5)

$$b = 4,5 - \frac{19}{30} \cdot 5 = 4,5 - \frac{19}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

D'où (D) : $y = \frac{19}{30}x + \frac{4}{3}$ ou encore

(D) : $y = 0,63x + 1,33$

PROBLEME

I- 1-) $g(x) = x^2 + \ln x$

Pour tout x de $]0, +\infty[$:

on a $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Tableau de variation de g

x	0 ... $+\infty$
g'(x)	+
g(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2-) D'après la question 1-), g étant continue et strictement croissante sur]0, +∞[, g est une bijection de]0, +∞[sur $g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$.

Or 0∈]-∞,+∞[, il existe donc un réel unique α dans]0, +∞[tel que g(α) = 0.

3-) <u>Signe de g(x) suivant les valeurs de x</u> :
Des résultats précédents : g strictement croissante sur]0, +∞[et g(α)= 0 , on a donc :
Pour x < α : g(x) < g(α) c'est-à-dire g(x) < 0
Pour x > α : g(x) > g(α) c'est-à-dire g(x) > 0

II- 1- a) $f(x)=(x+1)-\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$

Soit x ∈]0, +∞[on a :

$$f'(x)=1-\left(\frac{\frac{1}{x}.x-(1+\ln x)}{x^2}\right)=\frac{x^2-1+1+\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

Donc $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de]0, +∞[.

b) De la relation $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, et du fait que $x^2>0$ pour tout x de]0, +∞[, on en déduit que f'(x) a le même signe que g(x) pour tout x de]0, +∞[.

2-a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0+1-\frac{1+(-\infty)}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty+1-0-0=+\infty$

b) <u>Tableau de variation de f</u>

x	0		α		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	f(α)	↗	+∞

3-a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=-0-0=0$

La droite (Δ) d'équation y = x + 1 est donc une asymptote oblique de (𝒞).

b) Abscisse x_A du point A , intersection de (𝒞) avec (Δ) :

$$\begin{cases} y=x+1-\frac{1+\ln x}{x} & \text{avec } x>0 \\ y=x+1 \end{cases}$$

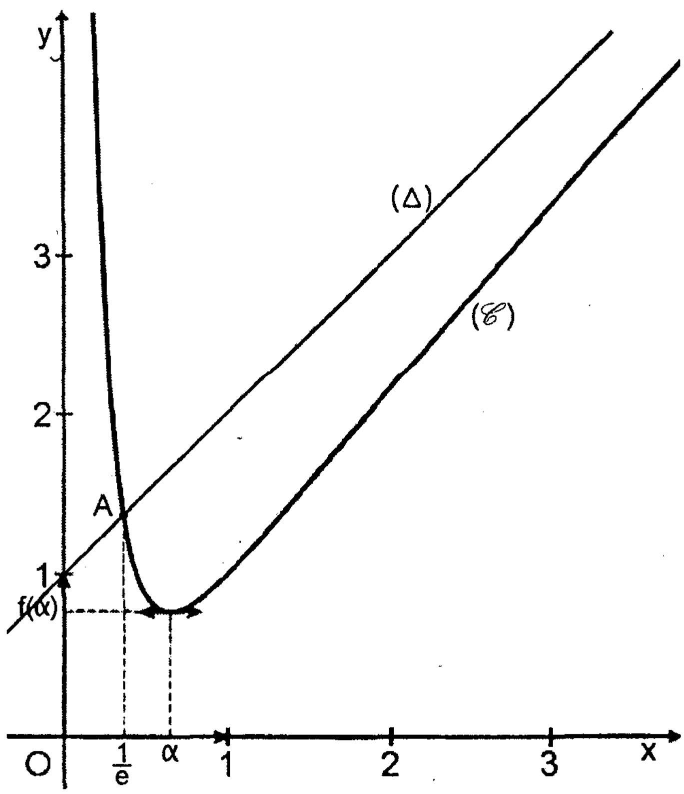
on a : $x+1-\frac{1+\ln x}{x}=x+1$ avec $x>0$

donc $\frac{1+\ln x}{x}=0$ avec $x>0$

soit $\ln x=-1$ d'où $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Le point A a pour abscisse $x_A=\frac{1}{e}$

4-) Tracés de (Δ) et (𝒞) .



5-) <u>Calcul de l'intégrale I</u>

$$I=\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx=\left(\int_1^e \frac{1}{x}(1+\ln x)dx\right)$$

$$=\left(\int_1^e \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{x}(1+\ln x)dx\right)=\left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_1^e$$

$$I=\frac{3}{2}$$

----------ooo0ooo---------

EXERCICE 1

Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ d'unité : 1cm.

1) P est le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (10+8i)z - 4 - 8i.$$

a) Calculer P(2).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

2) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = 2$; $c = 3 + i$ et d.

a) Calculer d pour que ABCD soit un carré.

b) On considère la similitude plane directe S définie par son expression complexe : $z' = (1 + i)z + 4i$

- Donner les éléments caractéristiques de S.
- Déterminer l'expression analytique de S.

3) Construire dans le même repère ABCD et A'B'C'D' son image par S.

EXERCICE 2

1) Les faces d'un dé cubique D_1 truqué sont numérotées : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3.

On lance une fois ce dé. Chaque face a la même probabilité d'apparition.

On note P_i la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i.

Calculer P_1, P_2 et P_3.

2) Les faces d'un deuxième dé cubique normal D_2 sont numérotées de 1 à 6.

On lance en même temps les deux dés D_1 et D_2.

Chaque face a toujours la même probabilité d'apparition.

a) Calculer la probabilité de l'événement :

A : « les deux dés affichent le même numéro »

b) On désigne par X la variable aléatoire définie par la somme des numéros affichés par les deux dés.

- Donner la loi de probabilité de X.
- Calculer l'espérance mathématique E(X).

3) On lance trois fois de suite et d'une façon indépendante le dé D_1.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face portant le numéro 2 lors de ces trois lancers.

a) Donner la loi de probabilité de Y.

b) Calculer la variance V(Y).

NB : Tous les résultats seront exprimés sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(1-\ln x)^2 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re\ (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 1cm.

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $[0\ ; +\infty[$.

2) a) Prouver que f est continue en $x_o = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_o = 0$.

3) a) Démontrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$ où f' désigne la fonction dérivée première de f.

b) Après avoir précisé le sens de variations de f, dresser son tableau de variations.

4) Tracer la courbe (C).

5) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ; e[$.

a) Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale

$$I = \int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx$$

b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par l'axe $(O, \vec{i})$, les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$ et la courbe (C).

Calculer en cm^2 $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e\ ; +\infty[$.

a) Démontrer que g admet une application réciproque notée g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Calculer $g\left(e^2\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(e^2\right)$.

7) Tracer dans le même repère que (C) la courbe représentative (Γ) de g^{-1}.

On donne $e \simeq 2{,}7$; $e^{-1} \simeq 0{,}36$; $e^2 \simeq 7{,}4$

CORRIGE

EXERCICE 1

1) Soit $P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (10+8i)z - 4 - 8i$

a) $P(2) = 2^3 - (6+2i)\cdot 2^2 + (10+8i)\cdot 2 - 4 - 8i$
$= 8 - 24 - 8i + 20 + 16i - 4 - 8i = 0$

b) Résolution de l'équation

$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (10+8i)z - 4 - 8i = 0$

On factorise d'abord P(z) sous la forme

$P(z) = (z-2)(z^2 + \alpha z + \beta)$

Utilisons la méthode de Hörner pour déterminer α et β

	1	$-6-2i$	$10+8i$	$-4-8i$
2		2	$-8-4i$	$4+8i$
	1	$-4-2i$	$2+4i$	0

On en déduit : $\alpha = -4-2i$ et $\beta = 2+4i$
On résoud maintenant l'équation

$P(z) = (z-2)(z^2 - (4+2i)z + 2 + 4i) = 0$

$(z-2) = 0 \quad : \quad z = 2$

ou $\quad (z^2 - (4+2i)z + 2 + 4i) = 0$

$\Delta' = 1$
$z' = 2 + i + 1 = 3 + i \quad ; \quad z'' = 2 + i - 1 = 1 + i$
L'ensemble des solutions est $S = \{2, 1+i, 3+i\}$

2) On donne les points A[a=1+i] ; B[b=2] ; C[c=3+i] et D[d] .
a) ABCD est un carré si et seulement si
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ et $AB = AD$
En passant aux affixes, on a :
- $b - a = c - d$
  $d = c - b + a = 3 + i - 2 + 1 + i = 2 + 2i$
- Vérifions que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$$

- Vérifions que $AB = AD$
  $AB = |b-a| = |1-i| = \sqrt{2}$
  $AD = |d-a| = |1+i| = \sqrt{2}$

d'où $d = 2 + 2i$

b) Soit S la similitude plane directe définie par son expression complexe $z' = (1+i)z + 4i$
- Eléments caractéristiques de S

Rapport de S : $k = |1+i| = \sqrt{2}$

Centre Ω de S : $z_\Omega = \dfrac{4i}{1-(1+i)} = -4$

Angle θ : $\theta = \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

- Expression analytique de S

Posons $z' = x' + y'i$ et $z = x + yi$; on a donc
$x' + y'i = (1+i)(x+yi) + 4i = x - y + (x + y + 4)i$
on en déduit

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 4 \end{cases}$$

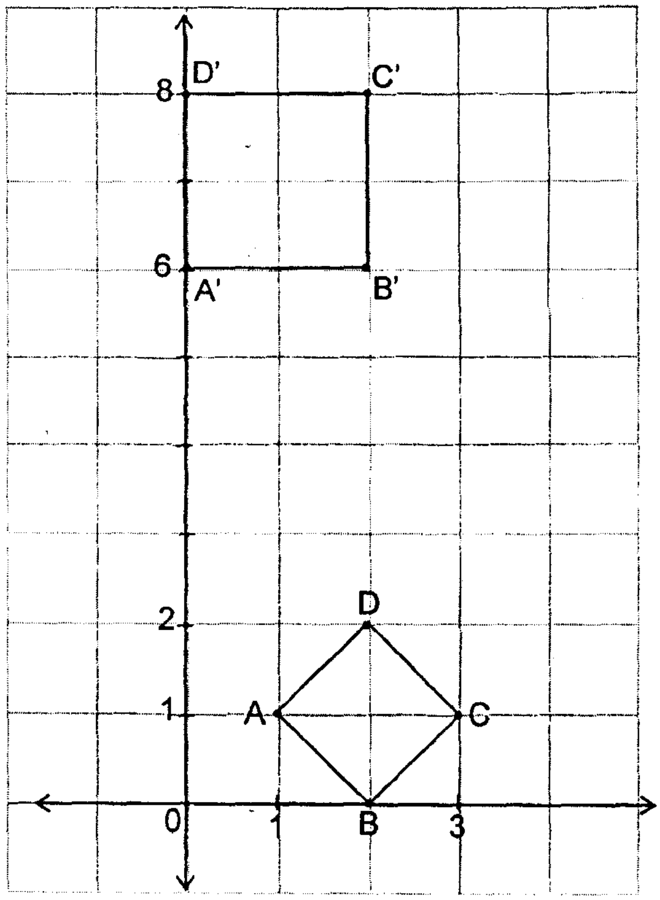
3) Construction de ABCD et A'B'C'D' son image par S

$z_{A'} = (1+i)(1+i) + 4i = 6i$

$z_{B'} = (1+i)\cdot 2 + 4i = 2 + 6i$

$z_{C'} = (1+i)(3+i) + 4i = 2 + 8i$

$z_{D'} = (1+i)(2+2i) + 4i = 8i$



EXERCICE 2

1) Les faces du dé D_1 sont numérotées :
1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3.
Puisque chaque face a la même probabilité d'apparition on a :

$P_1 = \dfrac{1}{6} \quad ; \quad P_2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad P_3 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

2) Les faces du dé D_2 sont numérotées :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
Posons q_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Le dé D_2 étant normal on a

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = \dfrac{1}{6}$.

On lance en même temps les deux dés D_1 et D_2

a) Calcul de probabilité

A : « les deux dés affichent le même numéro »

1N°1 de D_1 et 1N°1 de D_2

ou 1N°2 de D_1 et 1N°2 de D_2

ou 1N°3 de D_1 et 1N°3 de D_2

$$P(A) = P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 + P_3 \cdot q_3$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$
$$= \frac{1}{6}$$

b) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros affichés par les deux dés.

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)

L'univers image de X est $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

- Loi de probabilité de X

$$P(X=2) = P_1 \cdot q_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$
$$P(X=3) = P_1 \cdot q_2 + P_2 \cdot q_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(X=4) = P_3 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 + P_1 \cdot q_3$$
$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(X=5) = P_3 \cdot q_2 + P_2 \cdot q_3 + P_1 \cdot q_4$$
$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(X=6) = P_3 \cdot q_3 + P_2 \cdot q_4 + P_1 \cdot q_5$$
$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(X=7) = P_3 \cdot q_4 + P_2 \cdot q_5 + P_1 \cdot q_6$$
$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(X=8) = P_3 \cdot q_5 + P_2 \cdot q_6$$
$$= \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$
$$P(X=9) = P_3 \cdot q_6 = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$

- Espérance mathématique E(X) de X

$$E(X) = \frac{2}{36} + \frac{3}{12} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} + \frac{7}{6} + \frac{40}{36} + \frac{9}{12} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

3) Y suit la loi binomiale de paramètres

$n = 3$ et $p = P_2 = \frac{1}{3}$

Y a pour univers image $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

a) Loi de probabilité de Y

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(Y=k) = C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

k	0	1	2	3
P(Y=k)	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

b) Variance V(Y) de Y

$$V(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

PROBLEME

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(1-\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) $D_f = \{0\} \cup]0, +\infty[= [0, +\infty[$

2) a) Continuité de f en $x_o = 0$

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - 2x\ln x + x(\ln x)^2\right)$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x\ln x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x(\ln x)^2\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 \left(2\ln\sqrt{x}\right)^2\right)$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \left(2\sqrt{x}\ \ln\sqrt{x}\right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 + 0 = 0 = f(0)$$

f est donc continue en $x_o = 0$

b) Etude de la dérivabilité de f en $x_o = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

f n'est pas dérivable en $x_o = 0$

3) a) Pour $x > 0$:

$$f'(x) = (1-\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)(1 - \ln x)$$
$$= (1-\ln x)(1-\ln x - 2) = (1-\ln x)(-1-\ln x)$$
$$= -(1-\ln x)(1+\ln x) = (\ln x - 1)(1 + \ln x)$$

b) Signe de f'(x) et sens de variations de f

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
lnx – 1		–		–	0	+	
lnx + 1		–	0	+		+	
f'(x)	‖	+	0	–	0	+	

f est croissante sur $[0, e^{-1}]$ et sur $[e, +\infty[$
f est décroissante sur $[e^{-1}, e]$

Tableau de variation de f

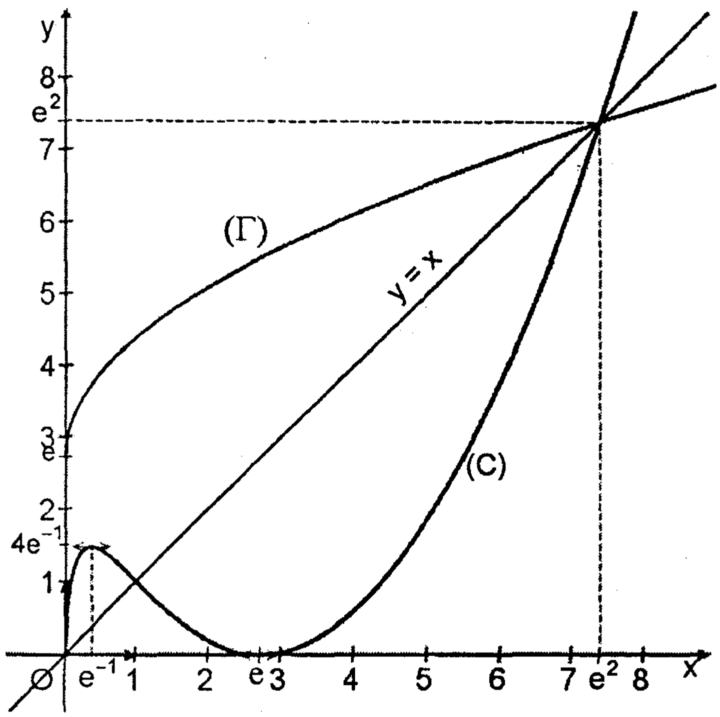
x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	–	0	+	
f(x)	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0	↗	$+\infty$

4) Tracé de (C)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\ln x)^2 = +\infty$

Lorsque $x \to +\infty$, la courbe (C) a une branche infinie parabolique suivant l'axe $(O, \vec{j})$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$: La courbe (C) a une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 0.



5) a) Calcul de $I = \int_\alpha^e x(1-\ln x)^2\,dx$

Procédons par deux intégrations par parties

Posons $u'(x) = x$ et $v(x) = (1-\ln x)^2$

$u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x) = 2\left(\dfrac{-1}{x}\right)(1-\ln x)$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2\right]_\alpha^e + \int_\alpha^e x(1-\ln x)\,dx$$

Posons $u'(x) = x$ et $v(x) = (1-\ln x)$

$u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x}$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2\right]_\alpha^e + \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_\alpha^e + \int_\alpha^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^2 + \frac{x^2}{2}(1-\ln x) + \frac{x^2}{4}\right]_\alpha^e$$

$$I = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}\alpha^2(1-\ln\alpha)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2(1-\ln\alpha) - \frac{1}{4}\alpha^2$$

b)

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}\alpha^2(1-\ln\alpha)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2(1-\ln\alpha) - \frac{1}{4}\alpha^2\right)cm^2$$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{4}e^2 \cdot cm^2$$

6) a) D'après les variations de f, la restriction g de f su
[e ; +∞[est continue et strictement croissante sur [e
+∞[; g est une bijection de [e ; +∞[sur
g([e ; +∞[) = [0 ; +∞[.
g admet donc une application réciproque g^{-1} définie sur [0 ; +∞[.

b) $g(e^2) = e^2(1-\ln e^2)^2 = e^2(-1)^2 = e^2$

$$(g^{-1})'(e^2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(e^2))} = \frac{1}{g'(e^2)} = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{3}$$

7) La courbe représentative (Γ) de g^{-1} se déduit de celle de g par symétrie par rapport à la droite d'équation y = x.
Voir la courbe (Γ) sur le graphique ci-contre.

----------ooo0ooo---------

EXERCICE 1

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, (unité graphique 2cm), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2$, $b=1-i\sqrt{3}$ et $c=2+2i$.
Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$,
puis M' d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-2\vec{u}$.
Enfin, on note T la transformation qui, à chaque point M, associe le point M'.

1-a) Déterminer la forme exponentielle de b.
b) Placer les points A et C, construire le point B puis le point C' image de C par T.

2-a) Démontrer que, pour tout complexe z :
$z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-2$.
b) Déterminer l'affixe c' du point C'.
c) Déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{c'}{c}$.
d) En déduire que le triangle OCC' est rectangle et calculer son aire, en cm^2.
e) Déterminer le point ayant pour image le point O par la transformation T.

3) On pose z = x + iy, avec x et y réels.
a) Pour z non nul, montrer que la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ est : $Re\left(\frac{z'}{z}\right)=\frac{x^2+y^2-4x}{2\left(x^2+y^2\right)}$.
b) Démontrer que l'ensemble (E) des points M du plan, tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer (E).

EXERCICE 2

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué.
Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancé est égale à $\frac{1}{3}$.

1) On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire égale le nombre de 6 obtenus.
a) Quelle loi de probabilité suit X ?
b) Quelle est son espérance ?
c) Calculer P(X = 2).

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
On considère les événements A et B suivants.
A : « le dé choisi est le dé bien équilibré »
B : « obtenir exactement deux 6 »
a) Calculer la probabilité des événements suivants :
« choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 »
« choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 »
b) En déduire que : $p(B)=\frac{7}{48}$.
c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé *n* fois de suite (*n* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
On note C_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces *n* lancers successifs ».
a) Déterminer, en fonction de *n*, la probabilité p_n de l'événement C_n.
b) Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

PROBLEME

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur [0 ; +∞ [par $f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x$.

Soit C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, $\left\|\vec{i}\right\|$ = 5cm et $\left\|\vec{j}\right\|$ = 10cm.

Etude de la fonction f_1

1) a) Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x de [0 ; +∞ [.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f_1.

2) a) Montrer que tout réel x de [0 ; +∞ [, $f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$.
b) En déduire la limite de f_1 en +∞.

3) Dresser le tableau de variation de f_1.

Etude et propriétés des fonctions f_k

4) a) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de [0 ; +∞ [.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f_k.

5) a) Montrer que tout réel x de [0 ; +∞ [,
$f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$.
b) En déduire la limite de f_k en +∞.

6) a) Dresser le tableau de variation de f_k.
b) Etablir que tout réel x de [0 ; +∞ [, ln(1 + x) ≤ x.
c) Montrer que pour réel x de [0 ; +∞ [, on a
$f_k(x)\le\frac{k}{e}$.

7) Déterminer une équation de la tangente T_k à C_k au point O.

8) Soit p et m deux réels strictement positifs tels que p < m.
Etudier les positions relatives de C_p et C_m.

9) Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

EXERCICE 1

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}=(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm.

1) On considère les points S, R et D d'affixes respectives (-4), $(1-i)$ et $(3i)$.

Représenter, dans $\mathfrak{R}$, l'image du triangle SRD, par la similitude plane directe de centre R, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Soit Ψ le nombre complexe défini par $\Psi=\frac{z-3i}{z+4}$.

a) Interpréter géométriquement Ψ.

b) M étant le point d'affixe z, préciser la nature de chacun des ensembles (Δ) et (Σ) définis respectivement par :

$(\Delta)=\{M\in(P);|\Psi|=1\}$ et $(\Sigma)=\left\{M\in(P);\arg(\Psi)=\frac{\pi}{2}\right\}$.

On justifiera que (Σ) ne passe pas par l'origine des axes.

c) Construire, dans R, (Δ) et (Σ).

3) On donne le polynôme Q, de la variable complexe z, défini par : $Q(z)=z^4-3iz^3+8iz+24$.

a) Calculer $Q(3i)$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z)=0$.

EXERCICE 2

1) A l'issue d'une expérience aléatoire, on définit une variable aléatoire X par le tableau suivant :

x	-1	2	3	4
$p(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$

a) Définir la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=8\text{cm}$.

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

2) Une soubique contient des poussins jaunes et des poussins gris. Un enfant prend au hasard et simultanément deux poussins de la soubique. Il y a 3 fois plus de chances, pour lui, de prendre deux gris que deux jaunes.

La probabilité de prendre deux poussins de couleurs différentes est le double de celle de prendre deux poussins gris.

a) Prouver que la probabilité pour l'enfant de prendre deux poussins gris est égale à 0,3.

b) Déterminer la probabilité pour l'enfant de prendre au moins un poussin gris.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x) \quad \text{si} \quad 0<x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1) Préciser l'ensemble de définition de f.
2) Prouver que f est continue en 0 et en 1.
3) Justifier que l'on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

Que peut-on en déduire pour la dérivabilité de f en 0 et en 1, puis pour les tangentes à la courbe représentative de f aux points $O(0;0)$ et $P(1;0)$?

4) a) Calculer f'(x) pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$.

b) Résoudre, dans $]0;1[$, l'inéquation : $\ln(1-x)-\ln(x)\leq 0$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer la courbe représentative de f et ses tangentes, dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 10 cm.

(On prend $\ln(2)\simeq 0,7$)

6) Soient u et v les fonctions numériques définies respectivement sur $]0;1[$ par :

$$u(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4} \quad \text{et} \quad v(x)=\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)-\frac{x^2-2x}{4}.$$

a) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.

b) Déterminer la primitive sur $]0;1[$ de f qui prend la valeur $-\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{2}$.

CORRIGE

EXERCICE 1

1) On donne les points $S(-4)$, $R(1-i)$ et $D(3i)$ et soit $s = S_{\left(R,-\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

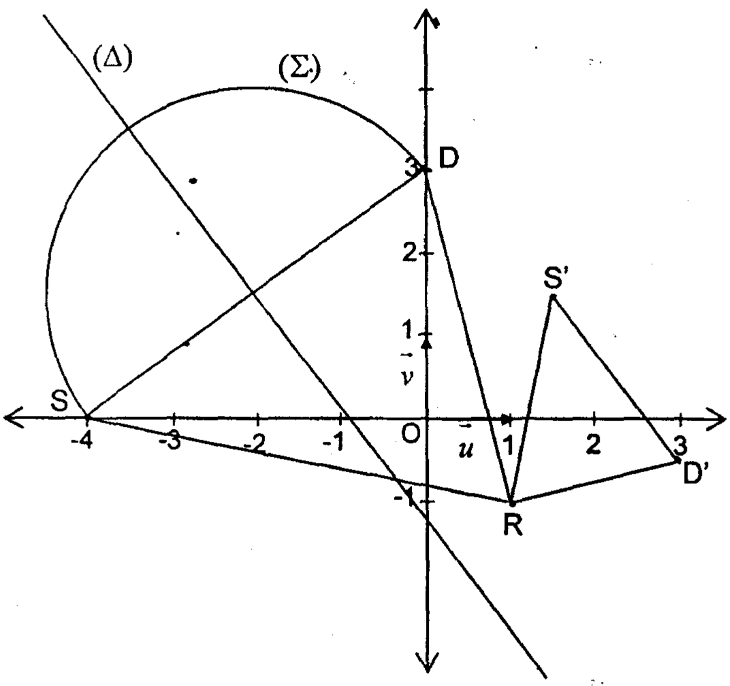
Représentation de l'image du triangle SRD par s

s(SRD) = (S'R'D') où S' = s(S) ; R' = s(R) et D' = s(D).

- R' = s(R) = R car R est le centre de s.

- Construction de S' = s(S) : $\begin{cases} RS' = \frac{1}{2}RS \\ \left(\widehat{\overrightarrow{RS},\overrightarrow{RS'}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$

- Construction de D' = s(D) : $\begin{cases} RD' = \frac{1}{2}RD \\ \left(\widehat{\overrightarrow{RD},\overrightarrow{RD'}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$



2) a) *Remarque* : la question posée aurait due être « Interpréter géométriquement le module et un argument de Ψ».

- D(3i) ; S(−4) ; M(z)

$|\Psi| = \frac{DM}{SM}$ et $\arg(\Psi) = \left(\widehat{\overrightarrow{SM},\overrightarrow{DM}}\right)$.

b) – Ensemble $(\Delta) = \{M \in (P); |\Psi| = 1\}$

$M \in (\Delta)$ équivaut à $|\Psi| = \frac{DM}{SM} = 1$ c'est-à-dire DM = SM

(Δ) est donc la médiatrice du segment [SD].

- Ensemble $(\Sigma) = \left\{M \in (P);\ \arg(\Psi) = \frac{\pi}{2}\right\}$

$M \in (\Sigma)$ équivaut à $\arg(\Psi) = \left(\widehat{\overrightarrow{SM},\overrightarrow{DM}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(Σ) est le demi-cercle supérieur de diamètre [SD] privé des points S et D.

- $\left(\widehat{\overrightarrow{SO},\overrightarrow{DO}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc $O \notin (\Sigma)$ ce qui signifie que (Σ) ne passe pas par l'origine O des axes.

c) Tracés de (Δ) et (Σ) : voir figure ci-contre.

3) Soit $Q(z) = z^4 - 3iz^3 + 8iz + 24$

a) $Q(3i) = (3i)^4 - 3i(3i)^3 + 8i(3i) + 24$
$= 81 - 81 - 24 + 24 = 0$

b) Formes trigonométriques des solutions de $Q(z) = z^4 - 3iz^3 + 8iz + 24 = 0$

- On factorise d'abord Q(z) sous la forme $Q(z) = (z-3i)\left(z^3 + az^2 + bz + c\right)$

Utilisons la méthode de Hörner pour déterminer a, b et c.

	1	– 3i	0	8i	24
3i		3i	0	0	–24
	1	0	0	8i	0

On en déduit : a = 0 ; b = 0 et c = 8i

- On résoud maintenant l'équation $Q(z) = (z-3i)\left(z^3 + 8i\right) = 0$

$z - 3i = 0$; $z = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ou

$z^3 + 8i = 0$ c'est-à-dire $z^3 = -8i$

Pour cette dernière équation, tout revient à déterminer les racines cubiques de $-8i = \left[8; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $[r,\theta]$ l'une d'elles. On a :

$[r;\theta]^3 = \left[r^3; 3\theta\right] = \left[8; -\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit

$r = \sqrt[3]{8} = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

- Les solutions de l'équation Q(z) = 0 sont :

$3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $2\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$

EXERCICE 2

1) Soit X une variable aléatoire telle que :

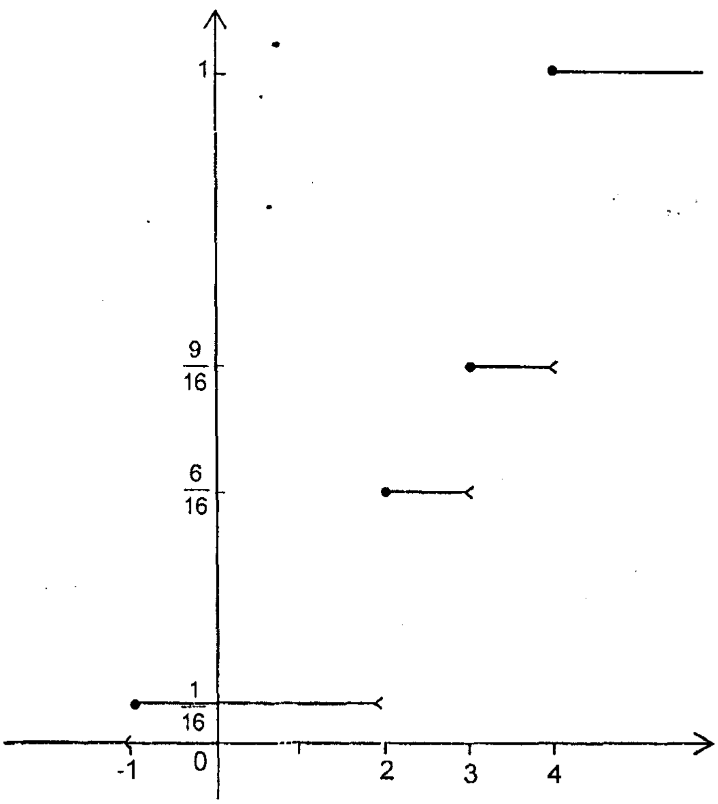
x	-1	2	3	4
$p(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$

a) Fonction de répartition F de X.

$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$\begin{cases} F(x)=0 & \text{si } x<-1 \\ F(x)=\frac{1}{16} & \text{si } -1\leq x<2 \\ F(x)=\frac{1}{16}+\frac{5}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8} & \text{si } 2\leq x<3 \\ F(x)=\frac{6}{16}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16} & \text{si } 3\leq x<4 \\ F(x)=\frac{9}{16}+\frac{7}{16}=\frac{16}{16}=1 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

b) Représentation graphique de F



c) <u>Espérance mathématique E(X) de X</u>.

$$E(X)=-1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+4\cdot\frac{7}{16}=\frac{46}{16}=2{,}875$$

<u>Variance V(X) de X</u>.

$$E\left(X^2\right)=1\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{5}{16}+9\cdot\frac{3}{16}+16\cdot\frac{7}{16}=\frac{160}{16}=10$$

$$[E(X)]^2=8{,}266$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=1{,}734$$

2) Un enfant prend au hasard deux poussins dans une soubique contenant des poussins jaunes et des poussins gris.

a) Soient :

- p_{2G} la probabilité de prendre deux poussins gris
- p_{2J} la probabilité de prendre deux poussins jaunes
- p_{GJ} la probabilité de prendre deux poussins de couleurs différentes.

Par hypothèse, on a : $p_{2G}=3p_{2J}$ et $p_{GJ}=2p_{2G}$

Or $p_{2G}+p_{2J}+p_{GJ}=1$

Donc $p_{2G}+\frac{1}{3}p_{2G}+2p_{2G}=\frac{10}{3}p_{2G}=1$

D'où $p_{2G}=\frac{3}{10}=0{,}3$

b) Soit p la probabilité de prendre au moins un poussin gris.

$$p=p_{GJ}+p_{2G}=2p_{2G}+p_{2G}=3p_{2G}=\frac{9}{10}=0{,}9$$

<u>PROBLEME</u>

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x) & \text{si } 0<x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1) <u>Ensemble de définition de f.</u>

$D_f=\{0\}\cup]0,1[\cup\{1\}=[0,1]$

2) - Montrons que f est continue en 0. (*On montre que f est continue à droite en* 0).

- $f(0)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x)\right)$ $=0-0=0=f(0)$

f est donc continue en 0.

- Montrons que f est continue en 1. (*On montre que f est continue à gauche en* 1).

- $f(1)=0$
- Posons $t=1-x$; $x=1-t$.

Si $x\to 1^-$ alors $t\to 0^+$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{t\to0^+}\left(-(1-t)\ln(1-t)-t\ln(t)\right)$$

$$=0-0=0=f(1)$$

f est donc continue en 1.

3) • $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\left(-\ln(x)-(1-x)\frac{\ln(1-x)}{x}\right)$

Posons $t=-x$; on a alors :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{t\to0^-}\left(-\ln(-t)+(1+t)\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

$$=+\infty+1\cdot1=+\infty$$

• $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{-x\ln(x)}{x-1}+\ln(1-x)\right)$

Posons $t=x-1$; on a alors:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{t\to0^-}\left(-(1+t)\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln(-t)\right)$$

$$=-1\cdot1-\infty=-\infty$$

- D'après les résultats ci-dessus, on conclut que f n'est ni dérivable en 0 ni dérivable en 1.
- La courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale respectivement aux points *O*(0 ;0) et *P*(1 ;0).

4) a) Soit $x\in]0\,;1[$.

$$f'(x)=-\ln(x)-x\cdot\frac{1}{x}+\ln(1-x)+(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$=\ln(1-x)-\ln(x)$$

b) Pour $x\in]0;1[$ soit $\ln(1-x)-\ln(x)\le0$. On a

$\ln(1-x)\le\ln x$

$1-x\le x$

$1\le2x$

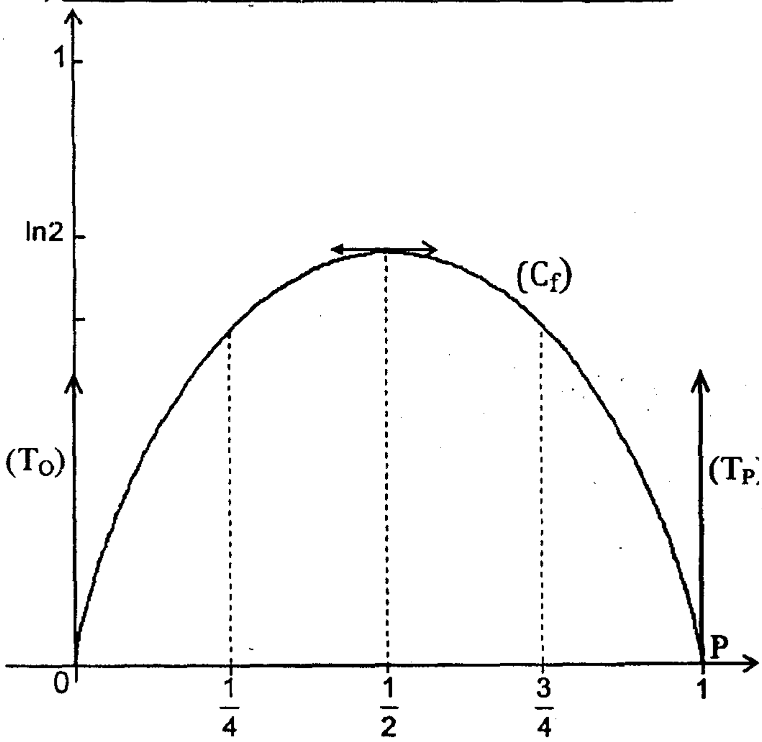
$\frac{1}{2}\le x$

$S=\left[\frac{1}{2};1\right[$

c) <u>Tableau de variation de f</u>

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'(x)	‖	+	*0*	−	‖
f(x)	0	↗	ln2	↘	0

5) <u>Courbe représentative de f et ses tangentes</u>



6) a) • $u(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}$

$$u'(x)=x\ln x+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=x\ln x$$

• $v(x)=\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)-\frac{x^2-2x}{4}$

$$v'(x)=-(1-x)\ln(1-x)+\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{2}$$

$$=-(1-x)\ln(1-x)$$

b) f étant continue sur]0 ;1[, soit F la primitive de f sur]0 ;1[telle que $F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$.

On remarque que f(x) = – u'(x) + v'(x) .

Donc F(x) = - u(x) + v(x) + k où $k\in\mathbb{R}$. Il en résulte que :

$$F(x)=-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)+\frac{x}{2}+k$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+k=-\frac{3}{4}$$

$$k=-1$$

D'où $F(x)=-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)+\frac{x}{2}-1$

----------ooo0ooo---------

EXERCICE 1

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A d'affixe -4, B d'affixe $+4$, E d'affixe $4i$, C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOED soient des carrés.

1) Placer les points précédents dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ et donner les affixes des points C et D.

2) Soit S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = (1+i)z + 4 + 4i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

b) Préciser les points S(A) et S(O).

Déterminer l'image par S de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment [AO].

c) Exprimer, pour tout point M d'affixe z, l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z.

En déduire que MM' = MC et, pour M distinct de C, montrer qu'une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MC}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$.

3) Soit J le milieu du segment [EB] et I le milieu du segment [AO].

Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on justifiera la réponse).

EXERCICE 2

Une urne U_1 contient une boule rouge et trois boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1) On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.

On lance une fois le dé ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne U_1, sinon on tire au hasard une boule de l'urne U_2.

a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne U_2 sachant qu'elle est rouge ?

2) On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a) Montrer que la probabilité de l'événement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b) Certains pensent que l'événement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'événement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

3) On réunit encore toutes les boules dans une seule urne.

a) L'épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir trois boules tricolores »

b) On répète quatre fois de suite l'épreuve et d'une manière indépendante. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé.

Calculer la probabilité p de l'événement :

« A est réalisé au moins une fois »

PROBLEME

2) On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire le signe de g(x) sur $]0\,;+\infty[$.

1) On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité graphique 2cm).

Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

c) Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0\,;+\infty[$.

Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.

4) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.

6) Montrer que l'équation f(x) = 0 a une solution unique α. Justifier l'encadrement $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$.

7) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

8) On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout entier naturel n.

Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

9) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)dx.$$

a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout entier naturel n.

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) : $z^3+(1-i)z^2+(-8+4i)z-4-28i=0$.

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure αi où α est un nombre réel que l'on déterminera.

2°) a- Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-\alpha i)\left(az^2+bz+c\right)=0$ où a, b, c sont des nombres complexes à déterminer.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3°) Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, d'unité 1 cm, on donne les points A, B, et C d'affixes respectives $-2i$; $3+i$ et $-4+2i$.

a- Placer les points A, B, et C dans le plan (P).

b- On pose $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c- En déduire la nature du triangle ABC.

d- Trouver l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

4°) Soit S la transformation d'expression complexe $z'=\frac{4}{3}iz-\frac{8}{3}-2i$

a- Quelle est la nature de S et donner ses éléments caractéristiques.

b- Construire l'image A'B'C'D' de ABCD par S^{-1}.

EXERCICE 2

I) Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher dont :

. 3 rouges numérotées : 2 ; 2 ; 5

. 5 blanches numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

1) Le jeu consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir deux boules de couleurs différentes »

B : « obtenir deux boules de numéros pairs »

C : « obtenir deux boules dont le produit des numéros est égal à 4 »

2) On tire au hasard et successivement avec remise 3 boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules portant le numéro 5 obtenu.

a) Déterminer l'univers image de X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

II) On donne sur le tableau ci-dessous le nombre d'élèves d'un lycée ayant réussi le Baccalauréat durant 4 années successives :

Année	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4
Nombre d'élèves en centaine (y_i)	3	5	6	9

1) Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ $1 \leq i \leq 4$ associé à cette série statistique.

Echelle : sur l'axe des abscisses, prendre 1 cm pour représenter une unité.
sur l'axe des ordonnées, placer 2 à l'origine des axes puis prendre 1 cm pour représenter 100 élèves.

2) Déterminer le point moyen G.
3) Calculer le coefficient de corrélation r et interpréter.
4) Ecrire l'équation de la droite de régression de y en x.
5) Combien de réussites peut-on espérer en 2014 ?

NB : Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$.
   a- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   b- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée α dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < \alpha < 0$.
   c- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b- Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
   c- Montrer que $f(\alpha) = 1 + \dfrac{2\alpha^2}{\alpha - 1}$.
   d- Dresser le tableau de variation de f.
3) a- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.
   b- Démontrer que la droite (D) : $y = 2x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   c- Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
4) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.
   b- Montrer qu'il existe un point A de $(\mathscr{C})$ où $(\mathscr{C})$ admet une tangente (T') parallèle à (D). Trouver les coordonnées du point A.
5) Tracer (D), (T), (T') et $(\mathscr{C})$ dans le même repère. Pour la construction, on prendra $\alpha = -0,4$ et $f(\alpha) = 0,8$.
6) a- A l'aide d'une intégration par partie ; calculer $I_\lambda = \int_0^\lambda xe^{-x}dx$.
   b- Déterminer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan délimité par $(\mathscr{C})$, (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$, $(\lambda > 0)$.
   c- Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

CORRIGE

EXERCICE 1

$(E):\ z^3+(1-i)z^2+(-8+4i)z-4-28i=0$

1°) (E) admet une solution imaginaire pure αi si et seulement si

$(\alpha i)^3+(1-i)(\alpha i)^2+(-8+4i)(\alpha i)-4-28i=0$

$-\alpha^2-4\alpha-4+\left(-\alpha^3+\alpha^2-8\alpha-28\right)i=0$

$$\begin{cases}-\alpha^2-4\alpha-4=0 & (1)\\ -\alpha^3+\alpha^2-8\alpha-28=0 & (2)\end{cases}$$

(1) est équivalente à : $-(\alpha+2)^2=0$ et donc $\alpha=-2$.

Pour $\alpha=-2$: (2) devient

$-(-2)^3+(-2)^2-8\cdot(-2)-28=8+4+16-28=0.$

Donc $\alpha=-2$. Par suite $\alpha i=-2i$ est une solution imaginaire pure de l'équation (E).

2°) a- $(E):\ z^3+(1-i)z^2+(-8+4i)z-4-28i=0$

$(E):\ (z+2i)\left(az^2+bz+c\right)=0$

Déterminons a,b et c par la méthode de Hörner.

	1	1 – i	–8 + 4i	–4 – 28i
– 2i		– 2i	–6 – 2i	4 + 28i
	1	1 – 3i	–14 + 2i	0

On en déduit $a=1$, $b=1-3i$ et $c=-14+2i$

D'où $(E):\ (z+2i)\left(z^2+(1-3i)z-14+2i\right)=0$

b- Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

$(z+2i)\left(z^2+(1-3i)z-14+2i\right)=0$

si et seulement si $z=-2i$ ou $z^2+(1-3i)z-14+2i=0.$

$\Delta=(1-3i)^2-4(-14+2i)=48-14i.$

Soit $\delta=x+yi$ une racine carré de $\Delta=48-14i.$

$$\begin{cases}x^2-y^2=48\\ x^2+y^2=\sqrt{48^2+14^2}=50\\ xy<0\end{cases}$$

Il en résulte que $\delta=7-i$ ou $\delta=-7+i$

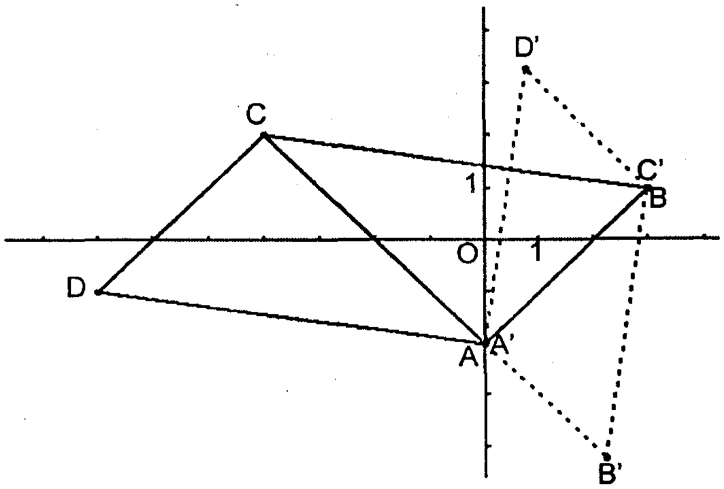
$z'=\dfrac{-1+3i+7-i}{2}=3+i$; $z''=\dfrac{-1+3i-7+i}{2}=-4+2i$

L'ensemble des solutions est $S=\{-2i\,;3+i\,;-4+2i\}$

3°) a- Voir les points A, B et C sur la figure ci-contre.

b- $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{3+i-(-2i)}{-4+2i-(-2i)}=\dfrac{3(1+i)}{4(-1+i)}=-\dfrac{3}{4}i$

$Z=\dfrac{3}{4}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$



c- D'après la question précédente, on a :

$\operatorname{mes}\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg\left(-\dfrac{3}{4}i\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

Le triangle ABC est rectangle en A.

d- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

si et seulement si $z_C-z_D=z_B-z_A$

si et seulement si $z_D=z_C-z_B+z_A=-4+2i-3-i-$

si et seulement si $z_D=-7-i$

4°) Soit S la transformation d'expression complexe

$z'=\dfrac{4}{3}iz-\dfrac{8}{3}-2i.$

a- z'est de la forme $z'=az+b$

avec $a=\dfrac{4}{3}i$ et $b=-\dfrac{8}{3}-2i.$

$|a|=\left|\dfrac{4}{3}i\right|=\dfrac{4}{3}\neq 1.$ Donc S est une similitude plane directe de rapport $k=|a|=\dfrac{4}{3}.$

Centre Ω : $z_\Omega=\dfrac{-\dfrac{8}{3}-2i}{1-\dfrac{4}{3}i}=\dfrac{\dfrac{1}{3}(-8-6i)}{\dfrac{1}{3}(3-4i)}=-2i=z_A$

Angle θ : $\theta=\arg(a)=\arg\left(\dfrac{4}{3}i\right)=\dfrac{\pi}{2}\pmod{2\pi}$

S est la similitdue plane directe de centre A, de rapport $\dfrac{4}{3}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b- S^{-1} est la similitude plane directe de centre A, de rapport $\dfrac{3}{4}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Voir l'image A'B'C'D' de ABCD par S^{-1} sur la figure ci-dessus.

EXERCICE 2

I) 1) Tirage au hasard et simultané de deux boules parmi 8.

<u>Calcul de probabilités</u>

• A : « obtenir deux boules de couleurs différentes » signifie « (obtenir 1 boule rouge parmi 3) et (1 boule blanche parmi 5) »

$$P(A)=\frac{C_3^1\,C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$$

• B : « obtenir deux boules de numéros pairs » signifie « obtenir 2 boules de numéros pairs parmi 4 »

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

• C : « obtenir deux boules dont le produit des numéros est égal à 4 »
signifie « obtenir 2 boules numérotées 2 parmi 3 » ou « obtenir (1 boule numérotée 1 parmi 1) et (1 boule numérotée 4 parmi 1)»

$$P(C)=\frac{C_3^2+C_1^1C_1^1}{C_8^2}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$$

2) Tirage au hasard et successif avec remise de 3 boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules portant le numéro 5 obtenu.

a) <u>Univers image de X</u>

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

b) <u>Loi de probabilité de X</u>

• $(X=0)$: « obtenir 3 boules non numérotées 5 parmi 6 »

$$P(X=0)=\frac{6^3}{8^3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

• $(X=1)$: « obtenir 1 boule numérotée 5 parmi 2 et 2 boules non numérotées 5 parmi 6 dans le désordre »

$$P(X=1)=3\times\frac{2^1\times6^2}{8^3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

• $(X=2)$: « obtenir 2 boules numérotées 5 parmi 2 et 1 boule non numérotée 5 parmi 6 dans le désordre »

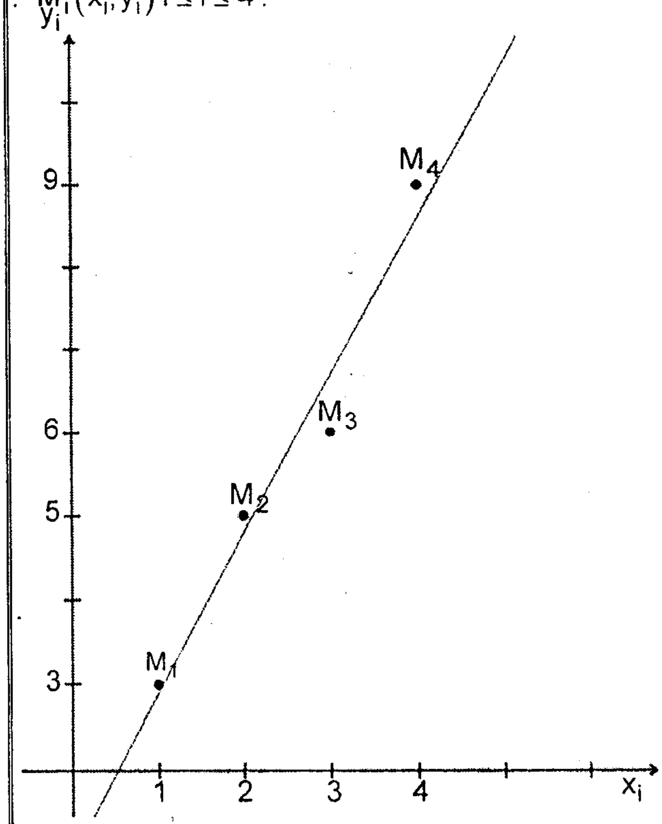
$$P(X=2)=3\times\frac{2^2\times6^1}{8^3}=\frac{9}{64}$$

• $(X=3)$: « obtenir 3 boules numérotées 5 parmi 2 »

$$P(X=3)=\frac{2^3}{8^3}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

II) 1) Représentation graphique du nuage des points $M_i(x_i,y_i)\,1\le i\le 4$.



2) Détermination du point moyen G

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{10}{4}=2{,}5$$

$$\bar{y}=\frac{3+5+6+9}{4}=\frac{23}{4}=5{,}75$$

$G(2{,}5\,;5{,}75)$

3) Calcul du coefficient de corrélation r.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\ y_i$
	1	3	1	9	3
	2	5	4	25	10
	3	6	9	36	18
	4	9	16	81	36
Σ	10	23	30	151	67

• $\sigma_{xy}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-\left(\bar{x}\cdot\bar{y}\right)=\frac{67}{4}-(2{,}5)\times(5{,}75)=2{,}38$

• $V(x)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i^2-\bar{x}^2=\frac{30}{4}-(2{,}5)^2=1{,}25$

$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{1{,}25}=1{,}12$

• $V(y)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}y_i^2-\bar{y}^2=\frac{151}{4}-(5{,}75)^2=4{,}69$

$\sigma_y=\sqrt{V(y)}=\sqrt{4{,}69}=2{,}17$

• D'où $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}=\frac{2{,}38}{1{,}12\times2{,}17}\simeq0{,}98$

La corrélation est très forte entre le rang de l'année et le nombre d'élèves ayant réussi le baccalauréat. On peut donc effectuer un ajustement affine entre y et x par la méthode des moindres carrés.

4) Equation de la droite de régression de y en x

$$y = ax + b \quad \text{où} \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{V(x)} = \frac{2,38}{1,25} = 1,90$$

La droite passe par le point $G(2,5\,;5,75)$

$b = 5,75 - 1,90 \times 2,5 = 1$

$y = 1,90x + 1$

5) L'année 2014 correspond au rang x = 8.

$y = 1,90 \times 8 + 1 = 16,2$

En 2014, on peut espérer 1620 élèves réussis au Baccalauréat.

PROBLEME

1) $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

a- Etude de variation de g

$D_g =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} - e^{-x} + 2 \right) = 0 - 0 + 2 = 2$$

Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$: $g'(x) = (2-x)e^{-x}$

$g'(x)$ a le même signe que $(2-x)$ car $e^{-x} > 0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	

g est croissante sur $]-\infty, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

b- L'examen du tableau de variation de g permet de déduire que pour tout $x \in [2, +\infty[$: $g(x) \geq 2 > 0$.

Par ailleurs g étant continue et strictement croissante sur $]-\infty, 2]$, g est une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $g(]-\infty, 2]) =]-\infty, e^{-2}+2]$. Or $0 \in]-\infty, e^{-2}+2]$, il existe donc un unique réel $\alpha \in]-\infty, 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$

Comme $g(-1) = 2 - 2e < 0$ et $g(0) = 1 > 0$, et donc $g(-1)g(0) < 0$, on en déduit d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que $-1 < \alpha < 0$.

D'où g s'annule une seule fois sur IR, en un réel α vérifiant $-1 < \alpha < 0$.

c- Signe de g(x)

- g est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et $g(\alpha) = 0$; on en déduit que :

- pour $x \in]-\infty, \alpha[$, $g(x) < 0$
- pour $x \in]\alpha, 2[$, $g(x) > 0$

- pour $x \in [2, +\infty[$, on sait que $g(x) > 0$

2) $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

a- • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) \right) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = 2 + (-1+x)e^{-x} = g(x)$

c- Calcul de $f(\alpha)$

$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$

Or $g(\alpha) = (\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$, donc $e^{-\alpha} = \dfrac{-2}{\alpha - 1}$

D'où $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1} = \dfrac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha - 1) + 2\alpha^2}{\alpha - 1} = 1 + \frac{2\alpha^2}{\alpha - 1}$$

d- Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x} - e^{-x} \right) = -\infty$

Lorsque $x \to -\infty$, la courbe ($\mathscr{C}$) a une branche infinie parabolique suivant l'axe (y'Oy).

b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (2x+1) \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-xe^{-x}) = 0$

Lorsque $x \to +\infty$, la droite (D) : y = 2x + 1 est asymptote oblique à la courbe ($\mathscr{C}$).

c- <u>Position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (D)</u>

On étudie le signe de $f(x)-(2x+1)$, on a :

$f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ a le même signe que $-x$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f(x) − (2x + 1)	+ 0 −

Pour $x \in \left]-\infty,0\right[$: la courbe ($\mathscr{C}$) est au-dessus de la droite (D).

Pour $x \in \left]0,+\infty\right[$: la courbe ($\mathscr{C}$) est au-dessous de la droite (D).

Pour x = 0 : la droite (D) coupe la courbe ($\mathscr{C}$).

4) a- Equation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=x+1$

b- Soit A un point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse x_0 et (T') la tangente à ($\mathscr{C}$) au point A.

(T') : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(D) : $y=2x+1$

(T') est parallèle à (D) si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

$f'(x_0)=2$

$(x_0-1)e^{-x_0}+2=2,$

donc $x_0=1$, et $f(1)=3-e^{-1}$

D'où $A\left(1\,;3-e^{-1}\right)$

5) Tracés de (D),(T), (T') et ($\mathscr{C}$), voir figure ci-contre.

6) a- Calcul de l'intégrale $I_\lambda=\int_0^\lambda xe^{-x}dx$

Posons $u'(x)=e^{-x}$ et $v(x)=x$

$u(x)=-e^{-x}$ et $v'(x)=1$

$$I_\lambda=\left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda+\int_0^\lambda e^{-x}dx=\left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^\lambda$$

$I_\lambda=(-\lambda-1)e^{-\lambda}+1$

b- <u>Calcul de l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$</u>

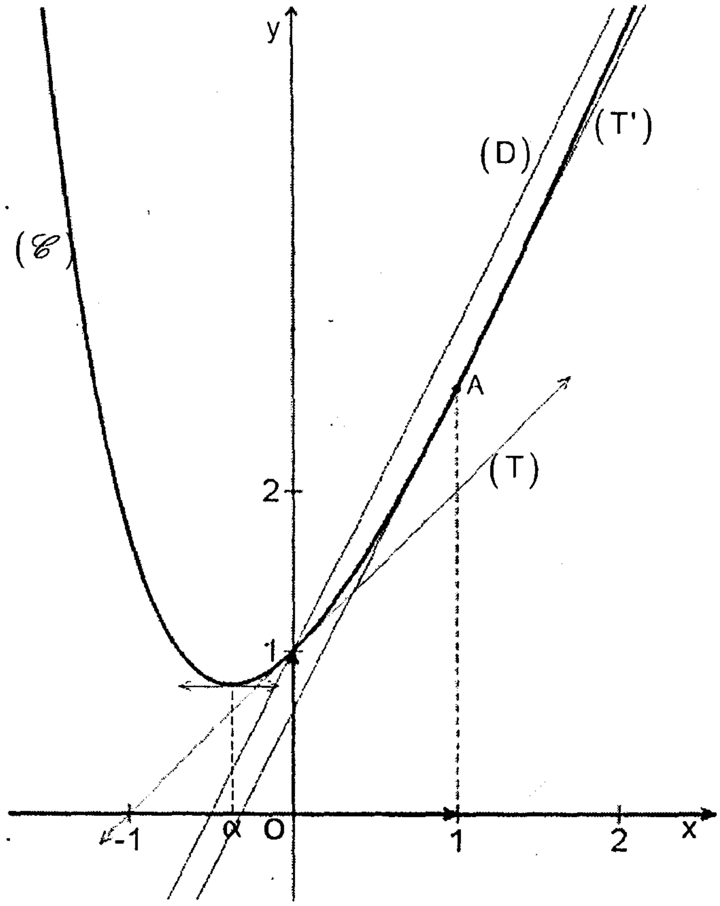
On a vu dans la question 3-c) que ($\mathscr{C}$) est au-dessous de (D), donc :

$$\mathscr{A}(\lambda)=\left(\int_0^\lambda\big((2x+1)-f(x)\big)dx\right)\cdot 4cm^2$$

$$=\left(\int_0^\lambda xe^{-x}dx\right)\cdot 4cm^2$$

$$\mathscr{A}(\lambda)=\left(4-4(\lambda+1)e^{-\lambda}\right)cm^2$$

c- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathscr{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(4-4\lambda e^{-\lambda}-4e^{-\lambda}\right)cm^2=4cm^2$



----------oooOooo---------

EXERCICE 1

1- Calculer $(2-i)^2$. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $iz^2-iz+1+i=0$.

2- Soit P le polynôme de variable complexe z définie par : $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4$.

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle positive α que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres a et b tels que : $P(z)=(z-1)(z-2-2i)(az+b)$.

3- Dans le plan complexe muni d'un repère orthogonal direct $\mathcal{R}(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les trois points A, B et C, d'affixes respectives : 1 ; $2+2i$ et $1-i$.

a) Donner la forme trigonométrique de $U=\dfrac{2+2i}{1-i}$.

b) En déduire la nature du triangle OBC.

4- Soit S la similitude plane directe telle que : $\begin{cases} x'=x+y-1 \\ y'=-x+y+2 \end{cases}$.

Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Un bassin contient 10 poissons dont 2 carpes, 3 tanches et 5 gardons.
On pêche au hasard et simultanément 3 poissons par un filet du bassin. Chaque poisson a la même probabilité d'être pris par le filet.
1- Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E_1 : « avoir aucune tanche »
E_2 : « avoir au moins une carpe »
E_3 : « avoir exactement 2 gardons »
2- On répète quatre fois de suite cette épreuve d'une manière indépendante.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de la réalisation de l'évènement E_3.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X).
c) Calculer la probabilité $P(X \leq 3)$.

(N.B : on donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).

PROBLEME

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1- Calculer $g'(x)$ puis étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$. (on ne demande pas les limites)

2- Calculer $g(1)$. En déduire que g est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

II- Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- a) Montrer que la droite (Δ), d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).

3- a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

4- a) Ecrire une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Tracer (T), (Δ) et $(\mathscr{C})$ dans le même repère.

5- Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

a) Déterminer $h'(x)$. En déduire l'expression de $I(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x) \cdot dx$ où $\alpha > 1$, en fonction de α.

b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

On donne $e \approx 2,7$

CORRIGE

EXERCICE 1

1- • Calcul de $(2-i)^2$.

$(2-i)^2 = 4-1-4i = 3-4i$.

• Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$(E): \ iz^2 - iz + 1 + i = 0$.

$\Delta = (-i)^2 - 4i(1+i) = -1-4i+4 = 3-4i$

$= (2-i)^2$ d'après la question précédente.

$z' = \dfrac{i+2-i}{2i} = -i \quad ; \quad z'' = \dfrac{i-2+i}{2i} = 1+i$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$S = \{-i\,;1+i\}$.

2- Soit $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4, \ z \in \mathbb{C}$.

a) L'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle α si et seulement si $\alpha^3 - (4+i)\alpha^2 + (7+i)\alpha - 4 = 0$

ou encore $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 + (-\alpha^2 + \alpha)i = 0$

soit $\begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 = 0 & (1) \\ -\alpha^2 + \alpha = 0 & (2) \end{cases}$

(2) est équivalente à $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

Pour $\alpha = 0$: (1) n'est pas vérifiée.

Pour $\alpha = 1$: (1) devient $1^3 - 4 + 7 - 4 = -7 + 7 = 0$.

Donc $\alpha = 1$ est une solution réelle positive de l'équation $P(z) = 0$.

b) $P(z) = (z-1)(z-2-2i)(az+b)$

Comme $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+1)z - 4$,

nécessairement on doit avoir

$a = 1$ et $-1(-2-2i)b = -4$

donc $a = 1$ et $b = \dfrac{4}{-2-2i} = \dfrac{4(1-i)}{-2\times 2} = -1+i$.

3- a) $U = \dfrac{2+2i}{1-i} = \dfrac{(2+2i)(1+i)}{2} = 2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) On en déduit que

$\left|\dfrac{2+2i}{1-i}\right| = 2$ et $\arg\left(\dfrac{2+2i}{1-i}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

soit $\dfrac{OB}{OC} = 2$ et $\text{mes}\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

OBC est un triangle rectangle en O.

4- S est la similitude plane directe telle que :

$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$

• <u>Expression complexe de S</u>

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a

$z' = (x+y-1) + i(-x+y+2) = x + y - 1 - ix + iy + 2i$

$= x + iy - ix + y - 1 + 2i = x + iy - i(x+iy) - 1 + 2i$

$= z - iz - 1 + 2i$

$z' = (1-i)z - 1 + 2i$

• <u>Eléments caractéristiques de S</u>

Centre Ω : $z_\Omega = \dfrac{-1+2i}{1-(1-i)} = 2+i$

Rapport k : $k = |1-i| = \sqrt{2}$

Angle θ : $\theta = \arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

EXERCICE 2

Un bassin contient 10 poissons dont 2 carpes, 3 tanches et 5 gardons.

L'épreuve consiste à pêcher au hasard et simultanément 3 poissons par un filet du bassin.

1- <u>Calcul de probabilités</u>

• E_1 : « avoir aucune tanche »

signifie « avoir 3 poissons non tanches parmi 7 »

$P(E_1) = \dfrac{C_7^3}{C_{10}^3} = \dfrac{35}{120} = \dfrac{7}{24}$.

• E_2 : « avoir au moins une carpe »

signifie « avoir 1 carpe parmi 2 et 2 non carpes parmi 8 » ou « avoir 2 carpes parmi 2 et 1 non carpe parmi 8 »

$P(E_2) = \dfrac{C_2^1\, C_8^2 + C_2^2\, C_8^1}{C_{10}^3} = \dfrac{56+8}{120} = \dfrac{64}{120} = \dfrac{8}{15}$.

• E_3 : « avoir exactement 2 gardons »

signifie « avoir 2 gardons parmi 5 et 1 non gardon parmi 5 »

$P(E_3) = \dfrac{C_5^2\, C_5^1}{C_{10}^3} = \dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$.

2- On répète quatre fois de suite cette épreuve d'une manière indépendante.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de la réalisation de l'évènement E_3.

a) X suit la loi binomiale de paramètres

$n = 4$ et $p = P(E_3) = \dfrac{5}{12}$.

L'univers-image de X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Loi de probabilité de X

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $P(X = k) = C_4^k\left(\frac{5}{12}\right)^k\left(\frac{7}{12}\right)^{4-k}$

$$P(X = 0) = C_4^0\left(\frac{5}{12}\right)^0\left(\frac{7}{12}\right)^4 = \frac{2401}{20736}$$

$$P(X = 1) = C_4^1\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{4 \times 5 \times 343}{20736} = \frac{1715}{5184}$$

$$P(X = 2) = C_4^2\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{6 \times 25 \times 49}{20736} = \frac{1225}{3456}$$

$$P(X = 3) = C_4^3\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{4 \times 125 \times 7}{20736} = \frac{875}{5184}$$

$$P(X = 4) = C_4^4\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0 = \frac{625}{20736}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{2401}{20736}$	$\frac{1715}{5184}$	$\frac{1225}{3456}$	$\frac{875}{5184}$	$\frac{625}{20736}$

b) • Espérance mathématique $E(X)$ de X

$$E(X) = 4 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{3} \simeq 1{,}67$$

• Variance $V(X)$ de X

$$V(X) = 4 \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{36} \simeq 0{,}97$$

c) $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{625}{20736} = \frac{20111}{20736}$

****

PROBLEME

I- Pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1- • $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$

• $g'(x)$ a même signe que $(x - 1)$ sur $]0, +\infty[$

car $\frac{2(x+1)}{x} > 0$.

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

2- • $g(1) = 1 + 2 - 0 = 3$.

De g strictement décroissante sur $]0,1]$ et $g(1) = 3$ on déduit pour tout $x \in]0,1]$, $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$.

De g strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et $g(1) = 3$ on déduit pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$

Donc g est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

II- Pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}$.

1- a) • Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ on a $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

par suite $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

• On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Comme $\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2- a) $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x - 1)\right) = \lim_{x \to +\infty} 2\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).

De $f(x) - (x - 1) = 2\frac{\ln x}{x}$ on déduit que $f(x) - (x - 1)$ a même signe que $\ln x$ sur $]0, +\infty[$ car $x > 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - (x-1)$		$-$	0	$+$	

Pour $x \in]0,1[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (Δ).

Pour $x \in]1, +\infty[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Δ).

Pour $x = 1$, $(\mathscr{C})$ et (Δ) ont un point commun $I(1, 0)$.

3- a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$f'(x) = 1+2\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 1+2\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Comme pour tout $x \in]0,+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $x^2 > 0$

donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

c) Tableau de variation de f

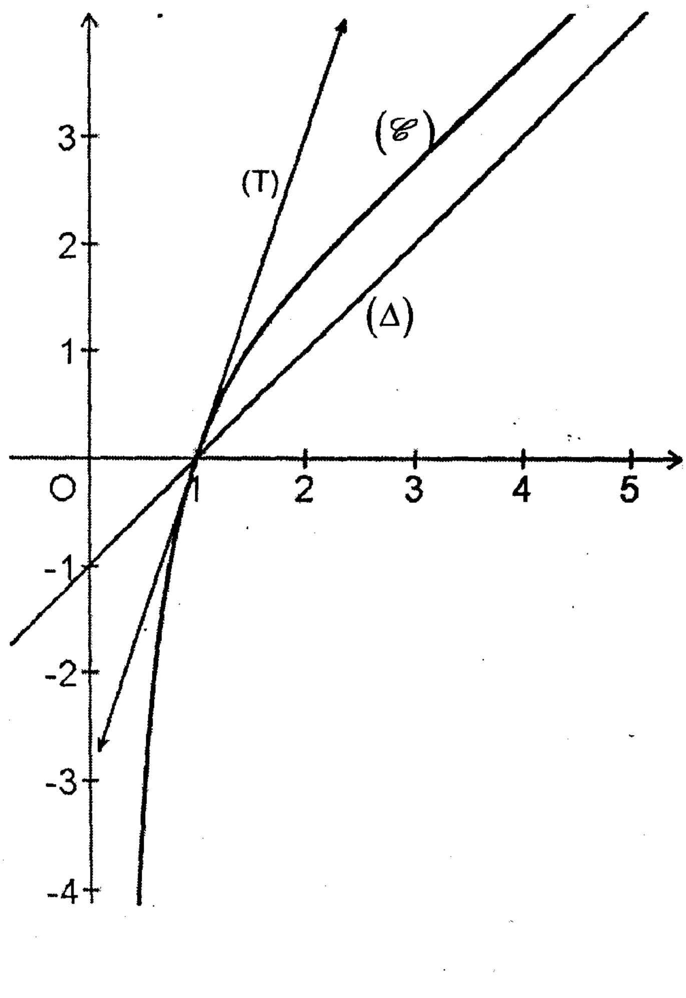
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4- a) Equation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 0$

$y = 3x - 3$

b) Tracés de (T), (Δ) et $(\mathscr{C})$.



5- Pour $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

a) • $h'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{1}{x}\cdot \ln x = \frac{\ln x}{x}$.

• Soit $\alpha > 1$.

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x)dx = \int_1^{\alpha}\left(x-1+2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + (\ln x)^2\right]_1^{\alpha}$$

$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha + (\ln\alpha)^2 + \frac{1}{2}$$

b) $\mathcal{A} = I(e)\times 4\,\text{cm}^2 = 4\left(\frac{e^2}{2} - e + (\ln e)^2 + \frac{1}{2}\right)\text{cm}^2$

$\mathcal{A} = \left(2e^2 - 4e + 6\right)\text{cm}^2 \simeq 9{,}78\,\text{cm}^2$

----------0000000---------

EXERCICE 1

1- Soit $P(z)=z^3+3(1-i)z^2-6(1+i)z-8+24i$ où z est un nombre complexe.

a) Démontrer que le nombre réel 2 est solution de l'équation $P(z)=0$.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$P(z)=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

2- Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 1 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 2 ; $-1+3i$ et -4.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle.

3- Soit S la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=(1+i)z-2i$.

a) Quelle est la nature de la transformation S ?

b) Déterminer les points images par S des points A et B. Que peut-on dire du point A ?

4- a) Vérifier l'égalité : $|z'|=\sqrt{2}\,|z-(1+i)|$.

b) Soit D le point d'affixe $1+i$. Interpréter géométriquement $|z|$ et $|z-(1+i)|$.

c) Déduire des questions précédentes l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z vérifiant $|z'|=\sqrt{2}\,|z|$ et tracer (Δ) dans le repère précédent.

EXERCICE 2

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	1	2	5	10
Nombre de boules	4	3	2	1

Un joueur mise 4 ariary, tire une boule au hasard et reçoit le montant (en ariary) inscrit sur la boule.

1- Le joueur effectue un tirage.

On appelle p_1 la probabilité pour qu'il perde (c'est à dire qu'il reçoive moins de 4 ariary) et p_2 la probabilité pour qu'il gagne (c'est à dire qu'il reçoive plus de 4 ariary).

Calculer p_1 et p_2.

2- Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne, négatif s'il perd).

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b) Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

c) Calculer son espérance mathématique E(X).

3- Un jeu est équitable si et seulement si E(X) = 0. On décide de changer le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1. Quel nombre doit-on y inscrire pour que le jeu soit équitable ?

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & \text{pour } x>0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

1- Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}$.

a) Étudier le sens de variation de g.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) En déduire le signe de g(x) pour tout x de $]0\,;+\infty[$

2- a) Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$

b) Démontrer que f est continue en 0.

3- La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.

4- a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$.

$\left(\text{on pourra utiliser le résultat } \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1\right)$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

5- Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f'(x)=g(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

6- Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ, la courbe (C) et la demi-tangente à (C) en son point d'abscisse 0.

7-.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)dx$.

b) Calculer alors, l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la région du plan délimitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

EXERCICE 1

Les Parties A et B sont indépendantes.

A- On dispose d'un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6, parfaitement équilibré et de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher de telle sorte que :

U_1 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

U_2 contient 3 boules noires et 7 boules rouges.

1) L'épreuve consiste à lancer une fois le dé puis à tirer une boule de U_1 ou de U_2.

Si le numéro 6 apparaît sur la face supérieure du dé, on tire une boule dans U_1.

Sinon, on tire une boule dans U_2.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le chiffre 6 apparaît et on obtient une boule blanche »

B : « Obtenir une boule noire »

2) On tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 et une boule de U_1.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boule(s) noire(s) obtenue(s).

a) Déterminer l'univers image de X.

b) Etablir la loi de probabilité de X.

B- Etant donnée une série statistique à deux variables (X, Y) dont la droite de régression de Y en X est : $y = 0,12x + 7,88$.

Sachant que la moyenne $\overline{X} = 51$ et le coefficient de corrélation $r = 0,93$.

a) Déterminer la moyenne arithmétique $\overline{Y}$.

b) Peut-on avoir un ajustement linéaire par moindres carrés ? Expliquer.

Déterminer une équation de la droite de régression de X en Y.

On donnera le résultat à 10^{-2} près.

EXERCICE 2

Soit $P(z) = z^3 - \left(3 + 3\sqrt{3}\,i\right)z^2 - \left(6 - 6\sqrt{3}\,i\right)z + 8 + 24\sqrt{3}\,i$ où $z \in \mathbb{C}$.

1- a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions réelles que l'on précisera.

b) En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

Dans tout ce qui suit, on considère dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2$; $z_B = 4$ et $z_C = 1 + 3\sqrt{3}\,i$.

2- a) Placer les points A, B et C.

b) Donner la forme algébrique du nombre complexe $Z = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

3- Soit D le point tel que ABDC soit un parallélogramme. On note par S la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en D.

a) Déterminer l'affixe de D et placer ce point.

b) Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

PROBLEME

On considère la fonction f, à variable réelle x, définie par

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{x} & \text{si } x\geq 0\\ e^{3x}-3x & \text{si } x<0\end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité graphique 2cm.

1- Etudier la continuité de f en $x_0=0$.

2- Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$.

(On donnera une interprétation graphique de ces résultats).

3- a) Etudier la branche infinie de $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-3x$ est une asymptote oblique pour la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

4- a) Après avoir étudié le sens de variation de f, dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que, pour tout x réel négatif, $e^{3x}-3x-1>0$.

5- Tracer dans le même repère, en précisant les deux demi-tangentes, la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C})$.

6- On appelle g la restriction de la fonction f à $]-\infty;0[$.

a) Démontrer que l'équation $g(x)=2$ admet une solution unique α.

b) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g. Calculer en fonction de α, $(g^{-1})'(2)$.

c) Construire, dans le même repère que $(\mathscr{C})$, la courbe $(\mathscr{C}')$ représentant g^{-1}.

d) Calculer, en fonction de α et en cm^2, l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D), les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.

CORRIGE

EXERCICE 1

A- On dispose d'un dé cubique parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, et de deux urnes U_1 et U_2 telles que :

U_1 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

U_2 contient 3 boules noires et 7 boules rouges.

1) L'épreuve consiste à lancer une fois le dé puis à tirer une boule de U_1 ou de U_2.
Si le numéro 6 apparaît sur la face supérieure du dé, on tire une boule dans U_1.
Sinon, on tire une boule dans U_2.

Calculs de probabilités

A : « Le chiffre 6 apparaît et on obtient une boule blanche » signifie : « (Le chiffre 6 apparaît sur la face supérieure du dé) et (on obtient une boule blanche parmi 8 de U_1)»

$P(A)=\frac{1}{6}\times\frac{8}{10}=\frac{2}{15}$.

B : « Obtenir une boule noire » équivaut à :
« (Le chiffre 6 apparaît sur la face supérieure du dé) et (on obtient une boule noire parmi 2 de U_1) » ou « (Le chiffre 6 n'apparaît pas) et (on obtient une boule noire parmi 3 de U_2) »

$P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{10}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{17}{60}$.

2) On tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 et une boule de U_1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule(s) noire(s) obtenue(s).

a) Univers image de X

$X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

b) Loi de probabilité de X

• $(X=0)$: « Obtenir (2 boules rouges parmi 7 de U_2) et (1 boule blanche parmi 8 de U_1) ».

$$P(X=0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\times\frac{8}{10}=\frac{7\times6\times8}{10\times9\times10}=\frac{28}{75}.$$

• $(X=1)$: « Obtenir (1 boule noire parmi 3 de U_2 et 1 boule rouge parmi 7 de U_2) et (1 boule blanche parmi 8 de U_1) » ou « Obtenir (2 boules rouges parmi 7 de U_2) et (1 boule noire parmi 2 de U_1) ».

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_7^1}{C_{10}^2}\times\frac{8}{10}+\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\times\frac{2}{10}$$
$$=\frac{3\times7\times8}{5\times9\times10}+\frac{7\times6\times2}{10\times9\times10}=\frac{35}{75}$$

• $(X=2)$: « Obtenir (1 boule noire parmi 3 de U_2 et 1 boule rouge parmi 7 de U_2) et (1 boule noire parmi 2 de U_1) » ou « (Obtenir 2 boules noires parmi 3 de U_2 et (1 boule blanche parmi 8 de U_1)».

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_7^1}{C_{10}^2}\times\frac{2}{10}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\times\frac{8}{10}$$
$$=\frac{3\times7\times2}{5\times9\times10}+\frac{3\times8}{5\times9\times10}=\frac{11}{75}$$

• $(X=3)$: « Obtenir (2 boules noires parmi 3 de U_2) e (1 boule noire parmi 2 de U_1) ».

$$P(X=3)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\times\frac{2}{10}=\frac{3\times2}{5\times9\times10}=\frac{1}{75}.$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{28}{75}$	$\frac{35}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{1}{75}$

B- a) Détermination de la moyenne arithmétique $\overline{Y}$.
D'après le cours, l'équation de la droite de régression de Y en X est de la forme $y-\overline{Y}=a\left(x-\overline{X}\right)$.
ou encore $y=ax+\overline{Y}-a\overline{X}$
Or $y=0{,}12x+7{,}88$ et $\overline{X}=51$
donc $a=0{,}12$ et $\overline{Y}-a\overline{X}=7{,}88$
et par suite $\overline{Y}=7{,}88+0{,}12\times51=14$.

b) • Puisque le coefficient de corrélation $r=0{,}93$ est proche de 1, la corrélation entre X et Y est forte , don on peut avoir un ajustement linéaire par moindres carrés.
• On sait que l'équation de la droite de régression de X en Y est de la forme $x-\overline{X}=a'\left(y-\overline{Y}\right)$, et que le coefficient de corrélation linéaire r vérifie $r^2=aa'$.
On a donc $0{,}12a'=(0{,}93)^2=0{,}8649$.

$$a'=\frac{0{,}8649}{0{,}12}=7{,}2075\simeq7{,}21$$

La droite de régression de X en Y est alors

$x-51=7{,}21(y-14)$

$x=7{,}21\,y-7{,}21\times 14+51$

$x=7{,}21\,y-49{,}94.$

EXERCICE 2

1- a) x est une solution réelle de $P(z)=0$

si et seulement si

$$x^3-\left(3+3\sqrt{3}\,i\right)x^2-\left(6-6\sqrt{3}\,i\right)x+8+24\sqrt{3}\,i=0$$

$$x^3-3x^2-6x+8+\left(-3\sqrt{3}\,x^2+6\sqrt{3}\,x+24\sqrt{3}\right)i=0$$

$$\begin{cases} x^3-3x^2-6x+8=0 & (1)\\ -3\sqrt{3}\,x^2+6\sqrt{3}\,x+24\sqrt{3}=0 & (2)\end{cases}$$

• L'équation (2) est équivalente à

$x^2-2x-8=0$

$\Delta'=1-(-8)=9=3^2$

$x'=1+3=4\ ;\ \ x''=1-3=-2$

• Pour $x=4$, l'équation (1) devient

$4^3-3\times4^2-6\times4+8=72-72=0$

• Pour $x=-2$, l'équation (1) devient

$(-2)^3-3\times(-2)^2-6\times(-2)+8=-20+20=0$

Par suite -2 et 4 sont les solutions réelles de l'équation $P(z)=0$.

b) Résolution de l'équation $P(z)=0$

Comme -2 et 4 sont des solutions de l'équation $P(z)=0$ et que le coefficient de z^3 est 1, alors $P(z)$ peut se factoriser sous la forme

$P(z)=(z+2)(z-4)(z-a)$ où $a\in\mathbb{C}$.

$$P(z)=\left(z^2-2z-8\right)(z-a)$$
$$=z^3-(a+2)z^2+(2a-8)z+8a$$

Or

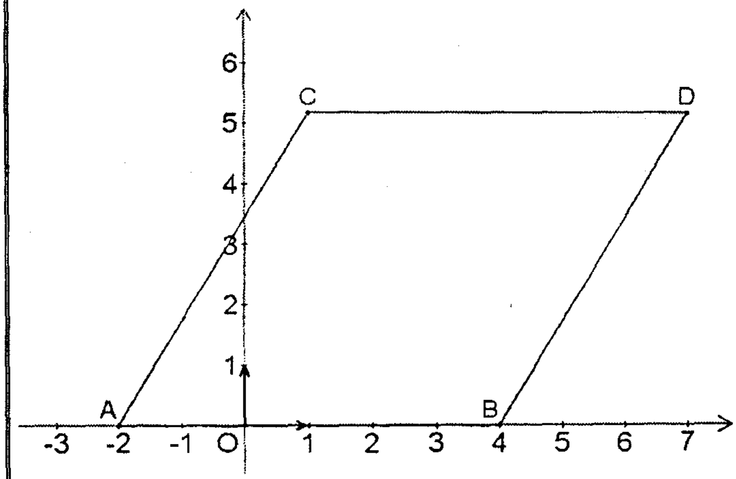
$$P(z)=z^3-\left(3+3\sqrt{3}\,i\right)z^2-\left(6-6\sqrt{3}\,i\right)z+8+24\sqrt{3}\,i$$

$$\text{donc}\begin{cases}-(a+2)=-\left(3+3\sqrt{3}\,i\right)\\ 2a-8=-\left(6-6\sqrt{3}\,i\right)\\ 8a=8+24\sqrt{3}\,i\end{cases}\quad \text{soit } a=1+3\sqrt{3}\,i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$S=\left\{-2\,;4\,;1+3\sqrt{3}\,i\right\}$

2- a) Placement des points $A(z_A=-2)$; $B(z_B=4)$ et $z_C=1+3\sqrt{3}\,i$.



b) Forme algébrique de $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

$$Z=\frac{4-(-2)}{1+3\sqrt{3}\,i-(-2)}=\frac{6\left(1-\sqrt{3}\,i\right)}{3\left(1+\sqrt{3}\,i\right)\left(1-\sqrt{3}\,i\right)}=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\,i\right)}{4}$$

$$Z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

• $Z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

On a $|Z|=1$ et $\arg(Z)=-\dfrac{\pi}{3}\ \ [2\pi]$

$$\begin{cases}|z_B-z_A|=|z_C-z_A| \text{ soit } AB=AC\\ \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\ \ [2\pi]\end{cases}$$

On en déduit que ABC est un triangle équilatéral.

3- a) ABDC est un parallèlogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ou encore $z_B-z_A=z_D-z_C$.

On en déduit $z_D=z_C+(z_B-z_A)=1+3\sqrt{3}i+6$

$z_D=7+3\sqrt{3}i$

● Voir le point D sur le graphique précédent.

b) Expression complexe de S

S a une expression complexe de la forme $z'=az+b$.

De $S(A)=A$ et $S(B)=D$ on a $\begin{cases}-2a+b=-2\\ 4a+b=7+3\sqrt{3}i\end{cases}$

$$-6a=-9-3\sqrt{3}i \text{ soit } a=\frac{-3\left(3+\sqrt{3}i\right)}{-6}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$b=-2+3+\sqrt{3}i=1+\sqrt{3}i$

$$\text{donc } z'=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+1+\sqrt{3}i$$

• Eléments caractéristiques de S.

Centre : le point A

Rapport : $k = \left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$

Angle : $\theta = \arg\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

PROBLEME

Soit f la fonction, à variable réelle x, définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{si } x \geq 0 \\ e^{3x} - 3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1- Etude de la continuité de f en $x_0 = 0$

• Comme $0 \geq 0$, on a $f(0) = (0+1)e^0 = 1$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = (0+1)e^0 = 1 = f(0)$.

f est continue à droite en $x_0 = 0$.

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = e^0 - 3\times 0 = 1 = f(0)$.

f est continue à gauche en $x_0 = 0$.

f étant à la fois continue à droite et continue à gauche en $x_0 = 0$ est donc continue en $x_0 = 0$.

2- • $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{3x}-3x-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{3x}-1}{x} - 3\right)$

Posons $t = 3x$, soit $x = \frac{t}{3}$. On a si $x \to 0^-$ alors $t \to 0^-$.

Il en résulte que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{t\to 0^-}\left(3\times\frac{e^t-1}{t} - 3\right) = 3\times 1 - 3 = 0.$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x+1)e^x - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{xe^x + e^x - 1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x + \frac{e^x-1}{x}\right)$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1+1 = 2$

• La courbe $(\mathscr{C})$ admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche (T_g) de coefficient directeur 0 et une demi-tangente à droite (T_d) de coefficient directeur 2.

3- a) Etude de branche infinie de $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)e^x = +\infty$ et que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^x = +\infty$$

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche infinie parabolique suivant l'axe $(y'Oy)$.

b) On a $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x) - (-3x)\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x} = 0$

donc la droite (D) d'équation $y = -3x$ est une asymptote oblique pour la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

4- a) Etude du sens de variation de f

- Pour $x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = 3e^{3x} - 3 = 3\left(e^{3x}-1\right)$

Or $x < 0$, on a $3x < 0$, par suite $e^{3x} < 1$ ou encore $e^{3x} - 1 < 0$, donc $f'(x) = 3\left(e^{3x}-1\right) < 0$.

Par conséquent f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

- Pour $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Or $x > 0$, on a $x+2 > 0$, et puisque $e^x > 0$, $f'(x) = (x+2)e^x > 0$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 ‖ 2	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

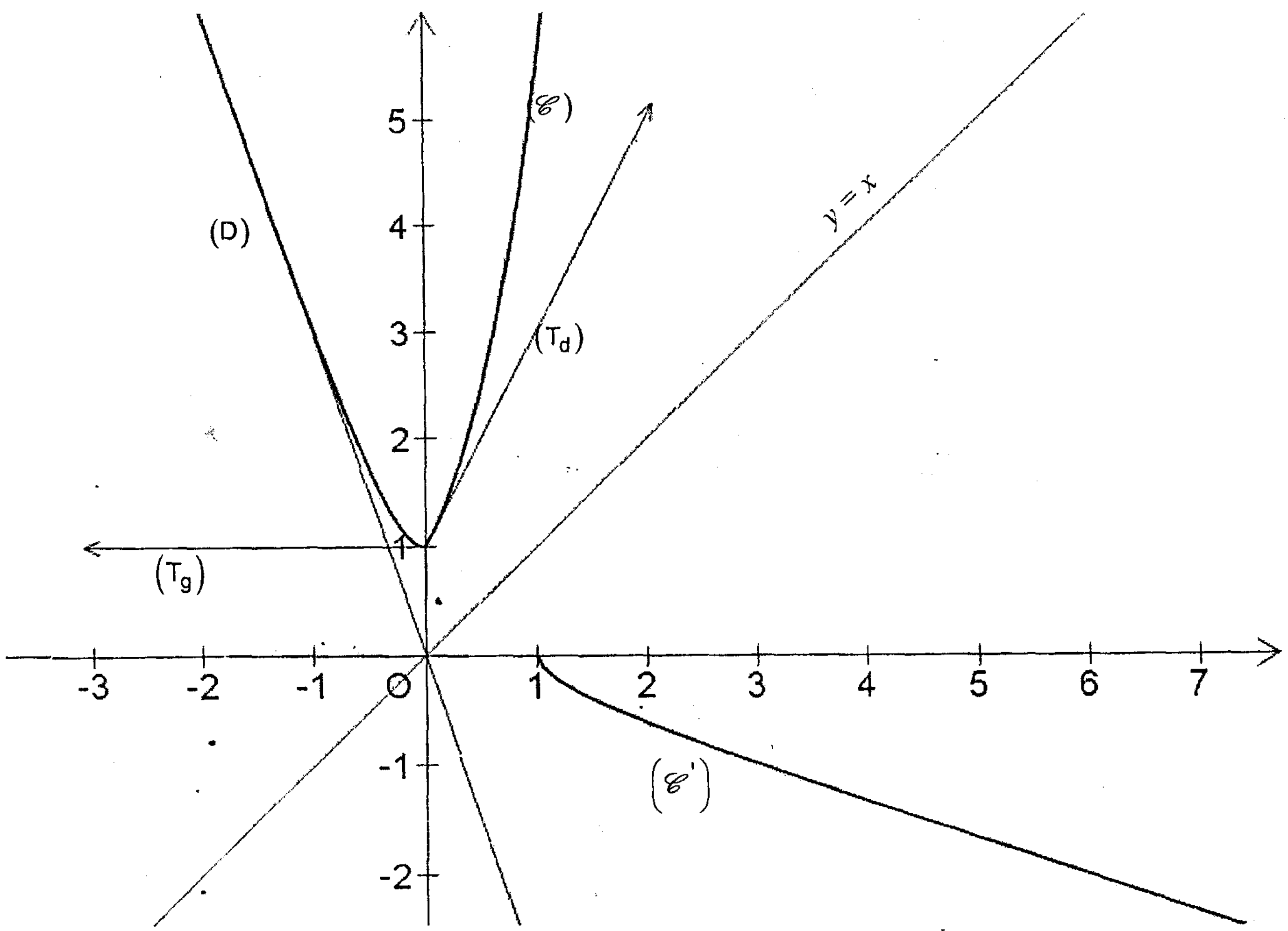
b) Montrons que pour tout x réel négatif, $e^{3x} - 3x - 1 > 0$.

D'après les résultats des questions 1-) et 4- a), on sait que f est continue en 0 et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

On en déduit que pour $x < 0$ on a $f(x) > f(0)$ c'est-à-dire $e^{3x} - 3x > 1$.

Par conséquent pour tout x réel négatif, on a $e^{3x} - 3x - 1 > 0$.

5- Tracés de $(\mathscr{C})$, (D) , (T_g), (T_d), et $(\mathscr{C}')$



6- Soit g la restriction de f à $]-\infty;0[$.

a) D'après les résultats de la questions 4- a), g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$. On en déduit que g est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $g(]-\infty;0[)=]1;+\infty[$.
Puisque $2\in]1;+\infty[$, l'équation $g(x)=2$ admet donc une solution unique α dans $]-\infty;0[$.

b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g.

On sait que $g(\alpha)=2$ ou encore $g^{-1}(2)=\alpha$.

$$\left(g^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{g'(\alpha)}=\frac{1}{3e^{3\alpha}-3}$$

c) La courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1} se déduit de celle de g par symétrie par rapport à la droite d'équation y = x.

Voir le tracé de $(\mathscr{C}')$ sur le graphique ci-dessus.

d) Calcul de l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.

$$\mathcal{A}_\alpha=\left(\int_\alpha^0\left|f(x)-(-3x)\right|dx\right)\times 4\text{cm}^2=\left(\int_\alpha^0 e^{3x}dx\right)\times 4\text{cm}^2$$

$$\mathcal{A}_\alpha=\left(\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_\alpha^0\right)\times 4\text{cm}^2=\frac{4}{3}\left(1-e^{3\alpha}\right)\text{cm}^2$$

----------oooOooo---------

EXERCICE 1

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par

$P(z)=z^3-(5+i)z^2+(a+ib)z-8-16i$, où a et b sont des nombres réels non nuls.

1- Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z)=0$.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i=0$.

3- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $z_I=2i$, $z_J=3+i$, $z_K=2-2i$, $z_A=\sqrt{3}+i$.

a) Placer les points I, J et K. A l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, construire le point A.

b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

4- Soit B le point du plan tel que $z_B=\overline{z_A}$.

a) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB.

b) Calculer l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange.

5- Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O. Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Une boîte contient six billets numérotés de 1 à 6.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux billets de la boîte. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1- Chaque résultat est représenté par un couple $(a;b)$ de deux nombres distincts où a est le numéro apparu au premier tirage et b le numéro apparu au deuxième tirage.

a) Démontrer qu'il y a 30 couples possibles.

b) Soit A, l'évènement : « Les deux numéros tirés sont pairs ».
Calculer la probabilité de A.

c) Calculer la probabilité de l'évènement :
B : « Obtenir au moins un numéro impair ».

2- Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat, associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres. Par exemple, pour les couples $(3;5)$ et $(5;3)$, la variable aléatoire X prend la valeur $5-3=2$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?

b) Calculer les probabilités : $P(X=1)$ et $P(X=3)$.

c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie sur $D_f =]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{2}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1- a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ (poser $x = X^2$). En déduire que (C) admet une branche parabolique suivant (Ox) au voisinage de $+\infty$.

2- On considère une deuxième fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - 2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Etudier la variation de g, puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer qu'il existe un nombre réel unique $\alpha \in]2;e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

En déduire le signe de $g(x)$.

3- a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f. On prend $\alpha = 2{,}5$ et $f(\alpha) = 1{,}12$.

4- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Tracer dans le même repère la droite (T) et la courbe (C).

5- a) On donne $\int_\alpha^e \ln x\,dx = -\alpha\ln\alpha + \alpha$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_\alpha^e \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln\alpha)^2 + \alpha\ln\alpha - \alpha.$$

b) Calculer, en fonction de α et en cm^2, l'aire géométrique *A* du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = e$.

c) Sachant que : $\alpha\ln\alpha = 2$, démontrer que $A = \left(\frac{e}{2} + 4 - \frac{6}{\alpha} - \alpha\right)cm^2$.

CORRIGE

EXERCICE 1

Soit le polynôme P à variable complexe z définie par $P(z)=z^3-(5+i)z^2+(a+ib)z-8-16i$.

1- Le nombre complexe $2i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$ si et seulement si

$(2i)^3-(5+i)(2i)^2+(a+ib)(2i)-8-16i=0$

$-8i+20+4i+2ia-2b-8-16i=0$

$-2b+12+i(2a-20)=0$

$\begin{cases}-2b+12=0\\ 2a-20=0\end{cases}$

D'où $a=\dfrac{20}{2}=10$ et $b=\dfrac{12}{2}=6$.

2- Résolution de l'équation

$z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i=0 \quad (E)$.

D'après la question précédente, $2i$ est une solution de l'équation $z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i=0$.

Il existe alors deux nombres complexes α et β tels que $P(z)=(z-2i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.

Déterminons α et β par la méthode Hörner.

	1	–5 – i	10 + 6i	–8 – 16i
2i		2i	–2 – 10i	8 + 16i
	1	–5 + i	8 – 4i	0

On a $\alpha=-5+i$ et $\beta=8-4i$.

Par suite $P(z)=(z-2i)\left(z^2+(-5+i)z+8-4i\right)=0$

si et seulement si

$z-2i=0$ ou $z^2+(-5+i)z+8-4i=0$

$\Delta=(-5+i)^2-4(8-4i)=-8+6i$.

Soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de Δ. On a

$\begin{cases}x^2-y^2=-8\\ x^2+y^2=\sqrt{64+36}=10\\ xy>0\end{cases}$

On en déduit que $\delta=1+3i$ ou $\delta=-1-3i$.

$z'=\dfrac{5-i+1+3i}{2}=3+i$

$z''=\dfrac{5-i-1-3i}{2}=2-2i$

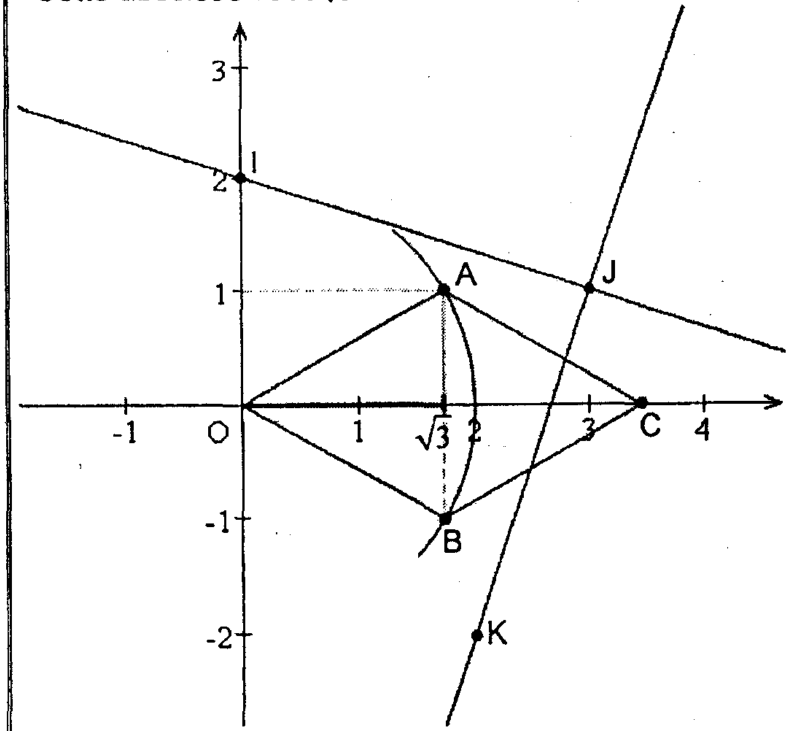
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$S=\{2i;3+i;2-2i\}$.

3- a) Placement des points $I(z_I=2i)$, $J(z_J=3+i)$, $K(z_K=2-2i)$, $A\left(z_A=\sqrt{3}+i\right)$.

Pour la construction du point $A\left(z_A=\sqrt{3}+i\right)$, on remarque que $\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2=2^2$, c'est-à-dire 2 est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de cotés 1 et $\sqrt{3}$.

On trace alors à l'aide d'un compas le cercle de centre O et de rayon 2, puis on marque à l'aide d'une règle le point d'ordonnée 1 et d'abscisse positive de ce cercle. Cette abscisse vaut $\sqrt{3}$.



b) Montrons que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires

$$\frac{z_K-z_J}{z_I-z_J}=\frac{2-2i-3-i}{2i-3-i}=\frac{-1-3i}{-3+i}=\frac{i(i-3)}{-3+i}=i$$

On en déduit que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JK}}\right)=\arg\left(\frac{z_K-z_J}{z_I-z_J}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi].$$

Ceci montre que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

4- Soit B le point du plan tel que $z_B=\overline{z_A}$.

a) $OA=|z_A|=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}=2$

$OB=\left|\overline{z_A}\right|=\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2$

$AB=|z_B-z_A|=\left|\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i\right|=|-2i|=2$

Il en résulte que AOB est un triangle équilatéral.

b) Pour que AOBC soit un losange il suffit que $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$, soit $z_A=z_C-z_B$ ou encore

$z_C=z_A+z_B=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i=2\sqrt{3}$.

5- Soit S la similitude plane directe telle que $S(B) = C$ et $S(O) = O$.

S a une expression complexe de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

De $S(O) = O$ et $S(B) = C$ on a $\begin{cases} 0 = a \times 0 + b \\ 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - i)a + b \end{cases}$

On en déduit que $b = 0$ et $a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

L'expression complexe de S est $z' = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z$

ou $z' = \left(\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z$.

Eléments caractéristiques de S

Centre : le point O

Rapport : $k = \left|\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right| = \sqrt{3}$

Angle : $\theta = \arg\left(\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

EXERCICE 2

Une boîte contient six billets numérotés de 1 à 6. On tire au hasard, successivement et sans remise deux billets de la boîte.

1- a) Chaque résultat est représenté par un couple (a,b) où a est le numéro apparu au premier tirage et b le numéro apparu au deuxième tirage.

Puisque le tirage s'effectue de façon successive et sans remise, chaque couple est donc un arrangement de deux numéros parmi 6.

Il en résulte que le nombre de couples possibles est $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$.

b) A : « les deux numéros tirés sont pairs » signifie « obtenir deux numéros pairs parmi 3 »

$P(A) = \frac{A_3^2}{30} = \frac{3 \times 2}{30} = \frac{1}{5}$

c) B : « obtenir au moins un numéro impair » est l'événement contraire de « obtenir aucun numéro impair » ou encore « les deux numéros tirés sont pairs »

Donc $B = \overline{A}$, soit $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

2- Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat, associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres

a) Valeurs possibles de X

$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5\}$

b) • $(X = 1) = \{(1,2);(2,1);(2,3);(3,2);(3,4);(4,3);(4,5);(5,4);(5,6);(6,5)\}$

$P(X = 1) = \frac{Card(X = 1)}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

• $(X = 3) = \{(1,4);(4,1);(2,5);(5,2);(3,6);(6,3)\}$

$P(X = 3) = \frac{Card(X = 3)}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

c) Loi de probabilité de X

• $P(X = 1) = \frac{1}{3}$

• $(X = 2) = \{(1,3);(3,1);(2,4);(4,2);(3,5);(5,3);(4,6);(6,4)\}$

$P(X = 2) = \frac{Card(X = 2)}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

• $P(X = 3) = \frac{1}{5}$

• $(X = 4) = \{(1,5);(5,1);(2,6);(6,2)\}$

$P(X = 4) = \frac{Card(X = 4)}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

• $(X = 5) = \{(1,6);(6,1)\}$

$P(X = 5) = \frac{Card(X = 5)}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

d) Espérance mathématique $E(X)$ de X

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{1}{15}$$
$$= \frac{5 + 8 + 9 + 8 + 5}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3} \simeq 2{,}33$$

Variance $V(X)$ de X

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{4}{15} + 9 \times \frac{1}{5} + 16 \times \frac{2}{15} + 25 \times \frac{1}{15}$$
$$= \frac{5 + 16 + 27 + 32 + 25}{15} = \frac{105}{15} = 7$$

$$V(X) = 7 - \frac{49}{9} = \frac{63 - 49}{9} = \frac{14}{9} \simeq 1{,}56$$

PROBLEME

Soit f la fonction numérique définie sur $D_f =]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{2}{x}$.

1- a) • Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

• Comme $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0^+$, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

b) • En posant $x=X^2$, on a si $x\to+\infty$ alors $X\to+\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{(\ln X^2)^2}{X^2}$

$$=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{(2\ln X)^2}{X^2}=\lim\limits_{X\to+\infty}4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=4\times 0^2=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\times\frac{(\ln x)^2}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=0+0=0$.

Il en résulte que la courbe (C) admet une branche parabolique suivant (Ox) au voisinage de $+\infty$.

2- Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-2$.

a) • $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x-2)=0-2=-2$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x-2)=+\infty$.

b) Etude de variation de g

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a $g'(x)=\ln x+\frac{x}{x}=\ln x+1$.

$g'(x)\geq 0$ si et seulement si

$\ln x+1\geq 0$ ou encore $\ln x\geq -1$ ou encore $x\geq e^{-1}$

D'une façon analogue, $g'(x)\leq 0$ si et seulement si $x\leq e^{-1}$.

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $]0;e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1};+\infty[$.

Tableau de variation de g

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-1}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(e^{-1})=e^{-1}\ln e^{-1}-2=-e^{-1}-2$.

c) • D'après les variations de g, la restriction de g à l'intervalle $]2;e[$ est continue et strictement croissante sur $]2;e[$.

De plus $g(2)=2\ln 2-2\simeq-0,6<0$ et $g(e)=e\ln e-2\simeq 0,7>0$.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc un nombre réel unique $\alpha\in]2;e[$ tel que $g(\alpha)=0$.

• Signe de $g(x)$

Pour $x\in]0;\alpha[$: $g(x)<0$

$g(\alpha)=0$

Pour $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$

3- a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x-\frac{2}{x^2}=\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x\ln x-2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) De la relation $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, on déduit que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car $x^2>0$.

Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

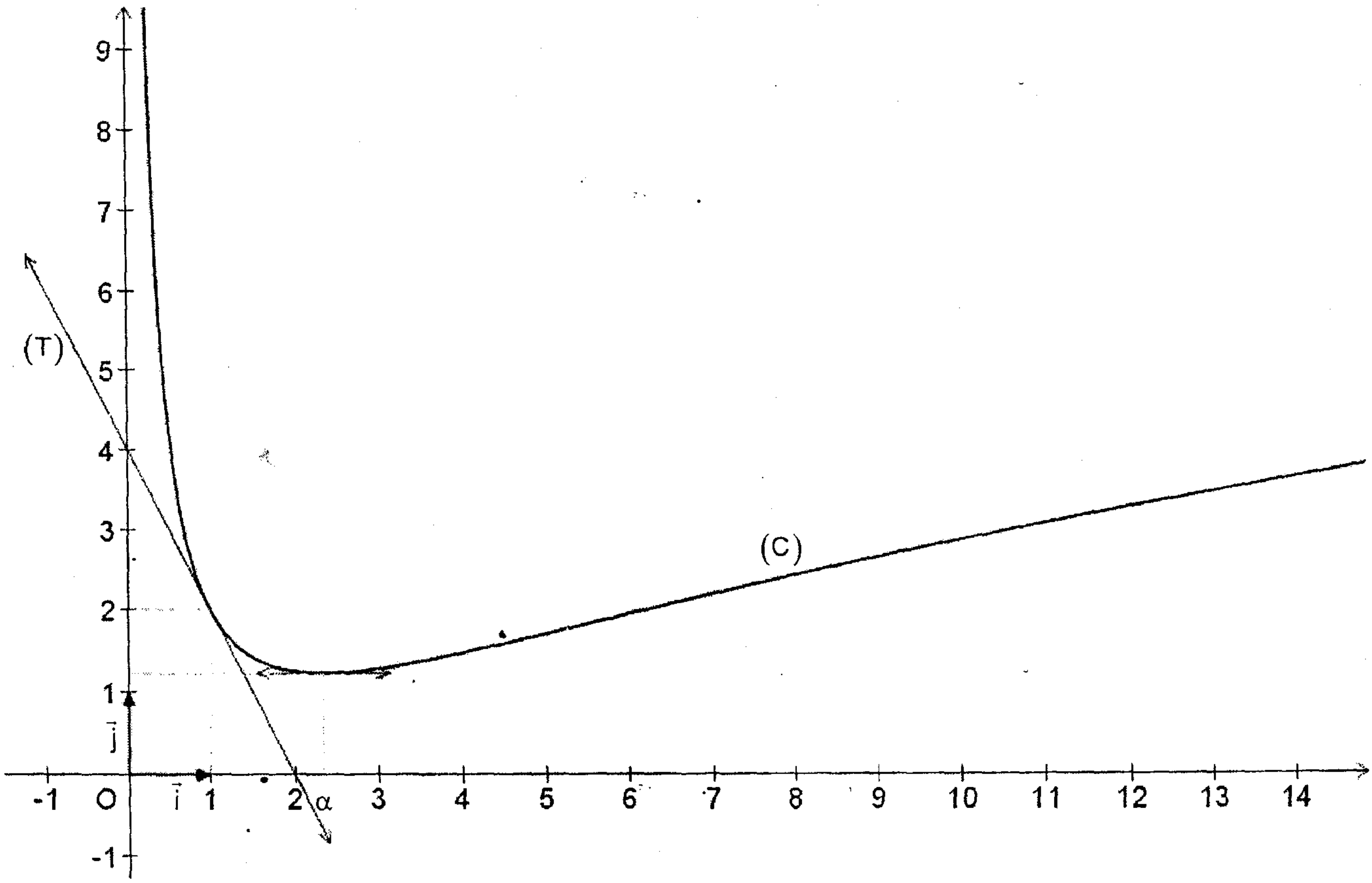
4- a) Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=1$.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(1)=-2$ et $f(1)=2$

$y=-2(x-1)+2=-2x+4$

b) Tracés de la tangente (T) et de la courbe (C).



<u>Remarque</u>

Pour une meilleure précision, $\alpha = 2{,}35$ à 10^{-2} près, tandis que $f(\alpha) = 1{,}22$ à 10^{-2} près.

5- a) Calcul de $\int_{\alpha}^{e} \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx$.

Intégrons par parties

Posons $u'(x) = \frac{1}{2}$ et $v(x) = (\ln x)^2$

$$u(x) = \frac{1}{2}x \text{ et } v'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$$

$$\int_{\alpha}^{e} \tfrac{1}{2}(\ln x)^2\,dx = \left[\frac{x}{2}(\ln x)^2\right]_{\alpha}^{e} - \int_{\alpha}^{e} \ln x\,dx$$

Or $\int_{\alpha}^{e} \ln x\,dx = -\alpha\ln\alpha + \alpha$ d'après l'énoncé,

on a donc $\int_{\alpha}^{e} \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln\alpha)^2 + \alpha\ln\alpha - \alpha$

b) $\mathcal{A} = \left(\int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx\right)\text{cm}^2$

$$= \left(\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{2}{x}\right)dx\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(\int_{\alpha}^{e}\frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx + \int_{\alpha}^{e}\frac{2}{x}\,dx\right)\text{cm}^2$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln\alpha)^2 + \alpha\ln\alpha - \alpha + \left[2\ln x\right]_{\alpha}^{e}\right)\text{cm}^2$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln\alpha)^2 + \alpha\ln\alpha - \alpha + 2 - 2\ln\alpha\right)\text{cm}^2$$

c) Sachant que $\alpha\ln\alpha = 2$ on a :

$$\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln\alpha)^2 + \alpha\ln\alpha - \alpha + 2 - 2\ln\alpha\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{e}{2} - \frac{(\alpha\ln\alpha)\ln\alpha}{2} + \alpha\ln\alpha - \alpha + 2 - 2\ln\alpha\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{e}{2} - \frac{2\ln\alpha}{2} + 2 - \alpha + 2 - 2\ln\alpha\right)\text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{e}{2} + 4 - \alpha - 3\ln\alpha\right)\text{cm}^2$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} + 4 - \alpha - 3\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)\text{cm}^2 \quad \text{car } \ln\alpha = \frac{2}{\alpha}$$

Donc $\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} + 4 - \frac{6}{\alpha} - \alpha\right)\text{cm}^2$.

----------oooooo---------

EXERCICE 1

Soit *f* une transformation définie dans un plan complexe (P) par :

$$f: \quad P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ telle que } f(z) = z' = \frac{iz-5+i}{z-4}.$$

1- a) Déterminer l'ensemble de définition de *f* noté D_f.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.

2- On considère dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, les points A, B, C et M d'affixes respectives $-2+i$; $1-i$; $3+2i$ et $z = x+iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble (D) des points $M(z)$ pour que $f(z)$ soit réel.

b) On pose $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. Donner la forme trigonométrique de Z et en déduire la nature du triangle ABC.

3- Calculer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un carré.

4- Soit S la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $S(B) = C$, dont son écriture complexe est de la forme $S : z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

a) Donner la forme algébrique du nombre complexe *a*.

b) En déduire la valeur du nombre complexe *b*.

c) Préciser le centre de S.

REMARQUE

Le début de l'énoncé de cet exercice a été mal formulé.

Au lieu de :

Soit *f* une transformation définie dans un plan complexe (P) par :

$$f: \quad P \to P$$
$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ telle que } f(z) = z' = \frac{iz-5+i}{z-4}.$$

Lire :

Soit *f* la fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{iz-5+i}{z-4}$.

EXERCICE 2

I. Sur 12 jetons indiscernables au toucher, placés dans une urne, sont écrites les lettres A ; A ; A ; A ; B ; B ; B ; D ; D ; E ; E ; E.

1- On tire successivement, avec remise, trois jetons de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :

G : « Obtenir au moins une lettre B ».

H : « Obtenir exactement une voyelle ».

2- On tire simultanément quatre jetons de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de consonnes obtenues.

a) Déterminer l'univers image de X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

N.B : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

/...

II. Les chiffres d'affaires d'une entreprise de l'année 2008 à 2012 sont représentés dans le tableau suivant : x_i désigne le rang de l'année et y_i le chiffre d'affaires en million d'Ariary.

Année	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Chiffre d'affaires en million d'Ariary y_i	504	580	644	y_3	735

L'équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = 57{,}3x + 516{,}2$.

1- Calculer les coordonnées du point moyen G.

2- En déduire la valeur de y_3.

3- En quelle année, l'entreprise pourra-t-elle atteindre le chiffre d'affaires de un milliard quatre cent trente trois millions d'Ariary ?

PROBLEME

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$.

On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 1 - e^{x}$.

a) Etudier les variations de g (on ne demande pas de calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$).

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2- a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Montrer que pour tout $x \in D_f$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \times \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{1}{xe^{x}}$.

d) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on conclure pour la courbe $(\mathscr{C})$?

3- a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour tout $x \in D_f$ où f' est la fonction dérivée de f.

b) Dresser le tableau de variation de f sur D_f.

4- a) Montrer que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse $\alpha \in]-1;0[$.

b) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

5- Construire $(\mathscr{C})$ et (T) dans le même repère.

6- a) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction $k : x \mapsto \ln(x+1)$ sur D_f.

c) Calculer en cm^2, l'aire géométrique du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$.

7- a) Montrer que f réalise une bijection de D_f sur l'intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ qui est la représentation graphique de f^{-1} de f dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

CORRIGE

EXERCICE 1

Soit *f* la fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\dfrac{iz-5+i}{z-4}$.

1- a) $f(z)$ est définie si $z-4\neq 0$, soit $z\neq 4$.
$D_f=\mathbb{C}-\{4\}$.

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z)=z$

$f(z)=z$ si et seulement si $\dfrac{iz-5+i}{z-4}=z$ et $z\neq 4$

si et seulement si $iz-5+i=z(z-4)$ et $z\neq 4$

si et seulement si $z^2-(4+i)z+5-i=0$ et $z\neq 4$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta=\left(-(4+i)\right)^2-4(5-i)=16-1+8i-20+4i$$
$$=-5+12i$$

Soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de Δ. On a

$$\begin{cases}x^2-y^2=-5\\ x^2+y^2=\sqrt{25+144}=13\\ xy>0\end{cases}$$

On en déduit que $\delta=2+3i$ ou $\delta=-2-3i$.

$$z'=\frac{4+i+2+3i}{2}=3+2i$$

$$z''=\frac{4+i-2-3i}{2}=1-i$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est
$S=\{3+2i\,;1-i\}$.

2- On considère les points $A[-2+i]$; $B[1-i]$; $C[3+2i]$ et $M[z=x+iy]$ où $x,y\in\mathbb{R}$

a) Soit (D) l'ensemble des points $M[z=x+iy]$ pour que $f(z)$ soit réel.

$f(z)$ est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(f(z))=0$.

On détermine d'abord la forme algébrique de $f(z)$.

$$f(z)=\frac{i(x+iy)-5+i}{x+iy-4}=\frac{-5-y+i(x+1)}{x-4+iy}$$
$$=\frac{(-5-y+i(x+1))(x-4-iy)}{(x-4+iy)(x-4-iy)}$$
$$=\frac{(-5-y)(x-4)+(x+1)y}{(x-4)^2+y^2}+i\frac{(x+1)(x-4)+(5+y)y}{(x-4)^2+y^2}$$

D'où $f(z)$ est réel si et seulement si

$(x+1)(x-4)+(5+y)y=0$ et $(x-4)^2+y^2\neq 0$.

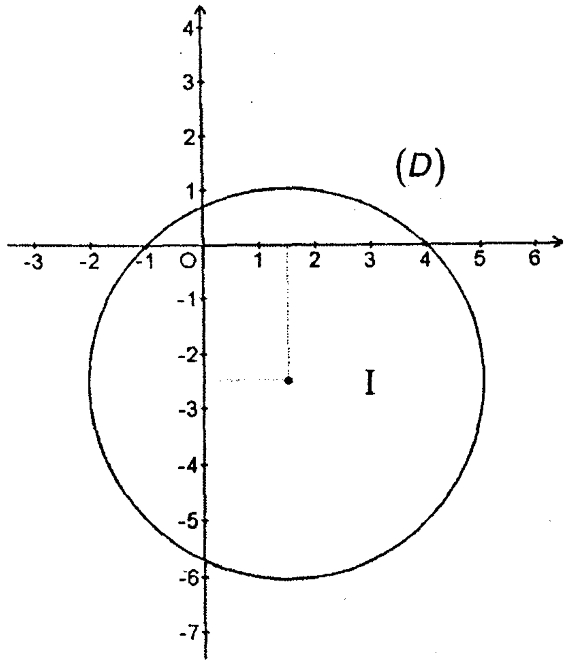
$x^2-3x-4+y^2+5y=0$ et $(x;y)\neq(4;0)$

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}-4+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}=0$ et $(x;y)\neq(4;0)$

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}=\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ et $(x;y)\neq(4;0)$

L'ensemble (D) est le cercle de centre $\mathrm{I}\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ et d

rayon $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ privé du point d'affixe 4.



b) • Forme trigonométrique de $Z=\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$.

$$Z=\frac{-2+i-(1-i)}{3+2i-(1-i)}=\frac{-3+2i}{2+3i}=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

• On en déduit que

$$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1 \text{ et } \operatorname{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

$$\frac{BA}{BC}=1 \text{ et mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

$$BA=BC \text{ et mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

Le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

3- Le quadrilatère ABCD est un carré si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $BA = BC$ et $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Or on a vu que $BA = BC$ et $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$,

donc pour que ABCD soit un carré, il suffit que l'on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

En passant aux affixes, on obtient :

$z_B - z_A = z_C - z_D$.

D'où $z_D = z_C - z_B + z_A = 3 + 2i - (1 - i) - 2 + i = 4i$.

4- Soit S la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et $S(B) = C$, dont son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

a) Forme algébrique de a

$$a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

donc $a = 1 + i$.

b) Forme algébrique de b

De $S(B) = C$, on a $z_C = (1 + i)z_B + b$.

D'où $b = 3 + 2i - (1 + i)(1 - i) = 1 + 2i$.

c) Le centre de S a pour affixe

$$\frac{1 + 2i}{1 - (1 + i)} = -2 + i = z_A.$$

S a pour centre le point A.

EXERCICE 2

I. Sur 12 jetons indiscernables au toucher, placés dans une urne, sont écrites les lettres A ; A ; A ; A ; B ; B ; B ; D ; D ; E ; E ; E .

1- On tire successivement, avec remise, trois jetons de l'urne.

Calculs de probabilités

• G : « obtenir au moins une lettre B »

$P(G) = 1 - P(\overline{G})$ où $\overline{G}$ est l'événement contraire à G.

$\overline{G}$: « n'obtenir aucune lettre B »

$$P(\overline{G}) = \left(\frac{9}{12}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

D'où $P(G) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.

• H : « obtenir exactement une voyelle » signifie « tirer une voyelle parmi 7 et deux consonnes parmi 5 » prises dans le désordre.

$$P(H) = 3 \times \frac{7}{12} \times \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{175}{576}.$$

2- On tire simultanément quatre jetons de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de consonnes obtenues.

a) Univers image de X

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) Loi de probabilité de X

• $(X = 0)$: « obtenir 0 consonne parmi 5 et 4 voyelles parmi 7 »

$$P(X = 0) = \frac{C_5^0 C_7^4}{C_{12}^4} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}$$

• $(X = 1)$: « obtenir 1 consonne parmi 5 et 3 voyelles parmi 7 »

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 C_7^3}{C_{12}^4} = \frac{175}{495} = \frac{35}{99}$$

• $(X = 2)$: « obtenir 2 consonnes parmi 5 et 2 voyelles parmi 7 »

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 C_7^2}{C_{12}^4} = \frac{210}{495} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

• $(X = 3)$: « obtenir 3 consonnes parmi 5 et 1 voyelle parmi 7 »

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 C_7^1}{C_{12}^4} = \frac{70}{495} = \frac{14}{99}$$

• $(X = 4)$: « obtenir 4 consonnes parmi 5 et 0 voyelle parmi 7 »

$$P(X = 4) = \frac{C_5^4 C_7^0}{C_{12}^4} = \frac{5}{495} = \frac{1}{99}$$

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$

c) Fonction de répartition F de X

$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$F(x)=0$ si $x<0$

$F(x)=\frac{7}{99}$ si $0 \le x < 1$

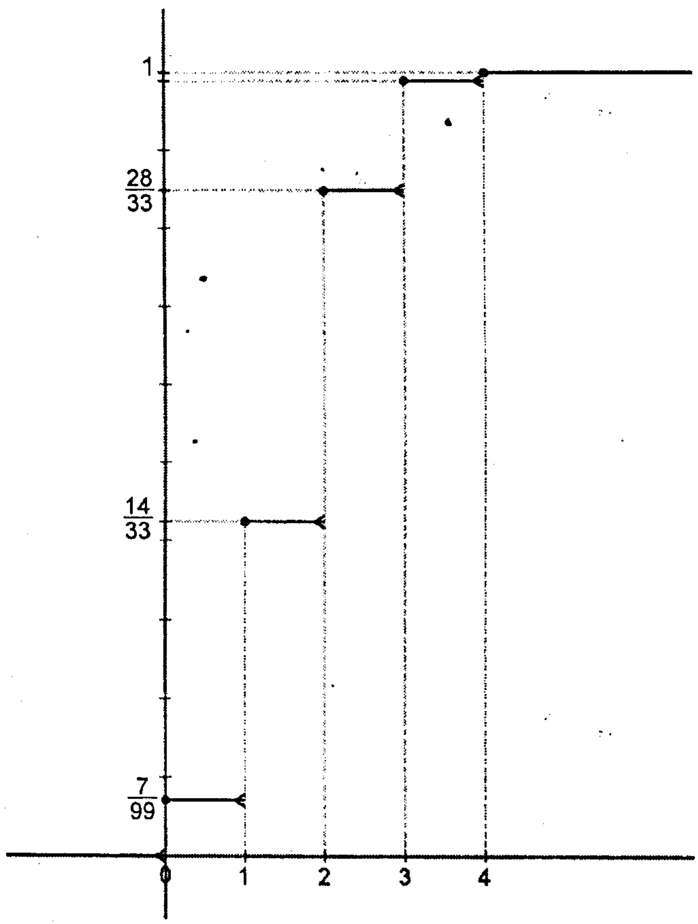
$F(x)=\frac{7}{99}+\frac{35}{99}=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}$ si $1 \le x < 2$

$F(x)=\frac{42}{99}+\frac{42}{99}=\frac{84}{99}=\frac{28}{33}$ si $2 \le x < 3$

$F(x)=\frac{84}{99}+\frac{14}{99}=\frac{98}{99}$ si $3 \le x < 4$

$F(x)=\frac{98}{99}+\frac{1}{99}=1$ si $x \ge 4$

Représentation graphique de F



II.*1- Coordonnées du point moyen G*

$$x_G=\frac{0+1+2+3+4}{5}=2$$

Comme G appartient à la droite de régression (D): $y=57{,}3x+516{,}2$, donc $y_G=57{,}3x_G+516{,}2$,

soit $y_G=57{,}3\times 2+516{,}2=630{,}8$.

Ainsi le point moyen G a pour coordonnées $(2\,;\,630{,}8)$.

2- On sait que

$$y_G=\frac{504+580+644+y_3+735}{5}=\frac{2463+y_3}{5}$$

ou encore $630{,}8=\frac{2463+y_3}{5}$

soit $y_3=630{,}8\times 5-2463=691$.

Donc $y_3=691$

3- L'entreprise pourra atteindre le chiffre d'affaires de un milliard quatre cent trente trois millions d'Ariary si $57{,}3x+516{,}2=1433$

soit $57{,}3x=1433-516{,}2=916{,}8$

donc $x=\frac{916{,}8}{57{,}3}=16$

$x=16$ correspond à l'année 2024

En conclusion, l'entreprise pourra atteindre le chiffre d'affaires de un milliard quatre cent trente trois million d'Ariary en 2024.

PROBLEME

1- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x+1-e^x$.

a) Etude de variation de g

$D_g=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $g'(x)=1-e^x$.

$g'(x)=0$ si et seulement si $x=0$.

$g'(x)>0$ si et seulement si $x<0$.

$g'(x)<0$ si et seulement si $x>0$.

La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ e strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. La fonction g admet un maximum absolu $g(0)=0$ en 0.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Signe de $g(x)$

On sait que $g(0)=0$.

Comme g est strictement croissante sur $]-\infty;0[$, on en déduit que pour tout $x \in]-\infty;0[$, $g(x)<g(0)$ ou encore $g(x)<0$.

De même, g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x)<g(0)$ ou encore $g(x)<0$.

En conclusion on a :
$g(0)=0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x)<0$.

2- Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$.

On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\ln(x+1)+e^{-x}\right)=-\infty$.

Lorsque $x\to(-1)^+$, la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)+e^{-x}\right)=+\infty$.

c) Pour tout x de D_f, on a :

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(x+1)+e^{-x}}{x}=\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{e^{-x}}{x}$$
$$=\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{xe^x}=\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}+\frac{1}{xe^x}$$

Donc $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\times\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{1}{xe^x}$.

d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$, il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Lorsque $x\to+\infty$, la courbe $(\mathscr{C})$ a une branche parabolique suivant l'axe $(x'Ox)$.

3- a) La fonction f est dérivable sur D_f et pour tout x de D_f, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-e^{-x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{e^x}=\frac{e^x-x-1}{(x+1)e^x}$$
$$=\frac{-\left(x+1-e^x\right)}{(x+1)e^x}=\frac{-g(x)}{(x+1)e^x}$$

b) $D_f=]-1;+\infty[$

Puisque pour tout x de D_f, $(x+1)e^x>0$, alors $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$ sur D_f. D'où le tableau de variation de f suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=1$

4- a) D'une part, l'examen du tableau de variation de f permet de déduire que pour tout x de $[0;+\infty[$, on a $f(x)\geq f(0)$ ou encore $f(x)\geq 1>0$, soit $f(x)\neq 0$.

D'autre part, la restrction $\tilde{f}$ de f à l'intervalle $]-1;0[$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-1;0[$. Par suite, $\tilde{f}$ est une bijection de $]-1;0[$ sur $\tilde{f}(]-1;0[)=f(]-1;0[)=]-\infty;1[$.

Or $0\in]-\infty;1[$, il existe donc un réel unique $\alpha\in]-1;0[$ tel que $\tilde{f}(\alpha)=f(\alpha)=0$.

En conclusion, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]-1;0[$, ou encore la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse $\alpha\in]-1;0[$.

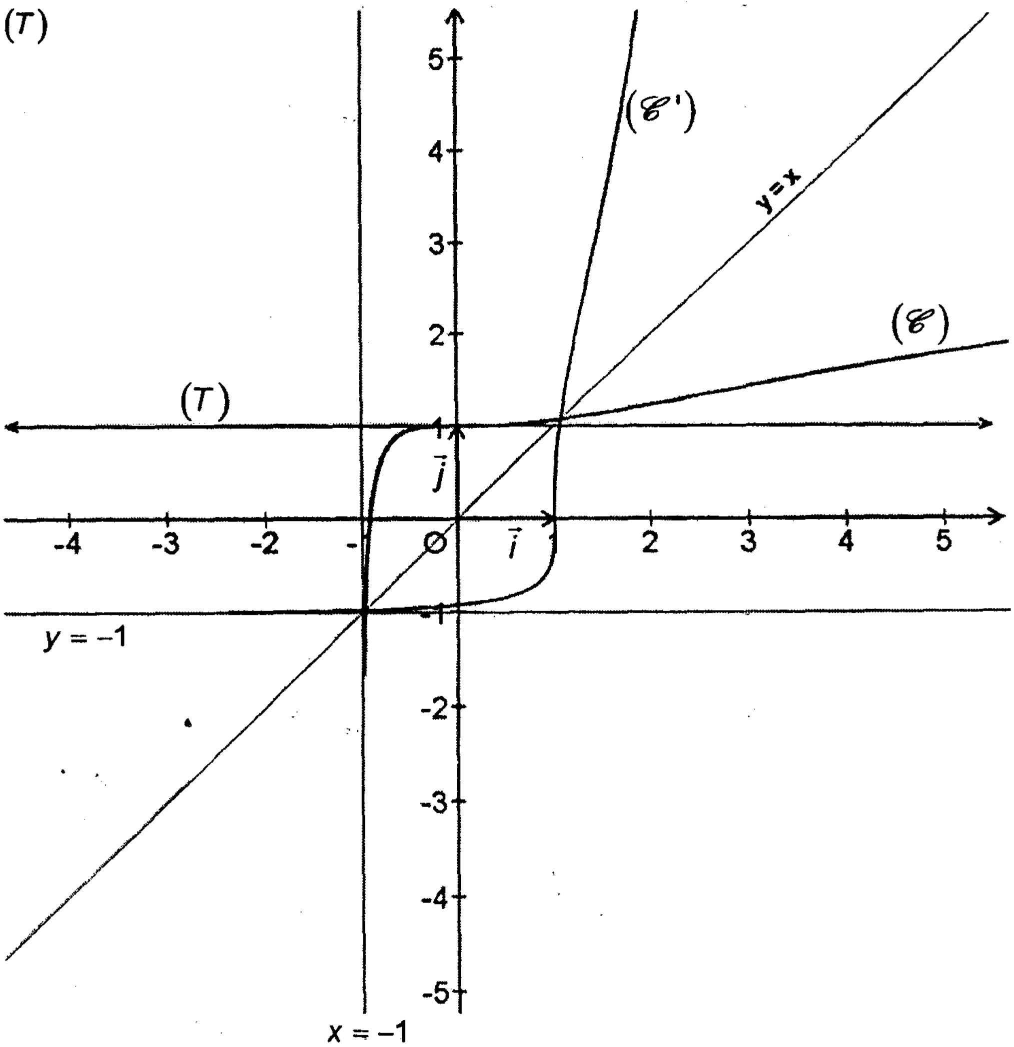
b) Equation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0=0$

$y=f'(0)(x-0)+f(0)=1$

(T) : $y=1$.

5- Tracés de $(\mathscr{C})$ et (T)

7- b) Tracé de $(\mathscr{C}')$



6- a) On a $\dfrac{x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{ax+a+b}{x+1}$

si et seulement si $a = 1$ et $a + b = 0$.

D'où $a = 1$ et $b = -1$.

b) Détermination d'une primitive de la fonction

$k : x \mapsto k(x) = \ln(x+1)$ sur D_f.

Intégrons par parties.

Posons $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = 1$

$$u'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad v(x) = x$$

$$\text{Prim}\,k(x) = x\ln(x+1) - \text{Prim}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= x\ln(x+1) - \text{Prim}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Une primitive de la fonction k sur D_f est donc la fonction $K : x \mapsto K(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire géométrique du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$\mathscr{A} = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)cm^2 = \left(\int_0^1 \left(\ln(x+1) + e^{-x}\right)dx\right)cm^2$$

$$= \left(\Big[(x+1)\ln(x+1) - x - e^{-x}\Big]_0^1\right)cm^2$$

$$= \left(2\ln 2 - e^{-1}\right)cm^2$$

7- a) D'après la question 3- b), la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur D_f .

f réalise donc une bijection de D_f sur l'intervalle $J = f(D_f) =]-\infty;+\infty[$.

b) La courbe $(\mathscr{C}')$, représentation graphique de f^{-1}, se déduit de la courbe $(\mathscr{C})$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Voir le tracé de $(\mathscr{C}')$ sur le graphique ci-dessus.

EXERCICE 1

1- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$2z^2+\left(7+i\sqrt{3}\right)z-4\left(1-i\sqrt{3}\right)=0$.

a) Démontrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
b) Donner alors l'autre solution de (E).

2- a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') :
$2z^4+\left(7+i\sqrt{3}\right)z^2-4\left(1-i\sqrt{3}\right)=0$.

3- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique: 2cm).
On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation S_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par:
$z'=(m+i)z+m-1-i$.

a) Peut-on choisir m de telle sorte que S_m soit une translation ?
b) Déterminer le réel m de telle sorte que S_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

4- Dans la suite de l'exercice on pose m = 1.
a) Calculer l'affixe du point Ω invariant par S_m.
b) Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\frac{z'-1}{z-1}$.
En interprétant géométriquement le module et un argument de $z'-1$, démontrer que S_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
c) Démontrer que, pour tout nombre complexe z on a :
$z'-z=i(z-1)$.
En déduire que si M est distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

EXERCICE 2

Pour lancer un nouveau produit P sur le marché, une société locale effectue un sondage auprès des éventuels clients. Dans le tableau ci-dessous: x représente le prix de vente unitaire du produit P exprimé en centaines d'ariary ; y représente la quantité du produit P demandée en millier.

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25

Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour une centaine d'ariary sur l'axe des abscisses, et 2 cm pour un millier sur l'axe des ordonnées.

1-a) Représenter graphiquement le nuage des points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$.
b) La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement affine ? Justifier la réponse.

2- On effectue le changement de variable suivant : $w_i=\ln y_i$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
a) Recopier et compléter le tableau suivant :
(les valeurs de w_i seront arrondies à 10^{-4} près)

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
$w_i=\ln y_i$						

b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série

c) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de w en x.
d) En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que $y=\alpha\cdot\beta^x$. Donner les valeurs approchées de α et β à 10^{-3} près. Déterminer une estimation de la demande y en fonction du prix x.
d) En supposant que cette tendance est maintenue, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont près à acheter si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines d'ariary.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique: 5cm).

I. Soit la fonction numérique g définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1-a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$, on a : $g'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

2- a) Dresser le tableau des variations de g.
b) En déduire que l'équation : g (x) = 0, admet une solution unique α et que $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

4. Déterminer le signe de g (x) suivant les valeurs de x.

II.1-a) Démontrer que, pour tout x élément de $\left]0\,;+\infty\right[$ on a : $f'(x)=g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

2- On pose $k(x)=x\,f(x)$ pour tout x élément de $\left]0\,;+\infty\right[$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)$ (on pourra poser $h=\frac{1}{x^2}$).

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3-a) Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x\ln\left(x^2+1\right)-2x\ln x$)

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

4-a) Dresser le tableau des variations de f.
b) Tracer la courbe (C) (on prendra $f(\alpha)\approx 0{,}805$).

5- Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I_\lambda=\int_\lambda^1 f(x)\,dx$

b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=\lambda$ et $x=1$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to0^+}A(\lambda)$.

EXERCICE 1

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$ d'unité 2cm.

1) P est le polynôme à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - 2z^2 + (2+i)z - 1 - i$.
   a) Calculer $P(1)$ et $(1-2i)^2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2) On considère les points A, B et C tels que $z_A = 1$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = i$.

   Ecrire le nombre complexe $a = \dfrac{z_B}{z_C}$ sous forme trigonométrique et en déduire a^4.
3) On considère la similitude plane directe S qui transforme M en M' telle que :
   $z' = (1+i)z + 2i$; M' d'affixe z' et M d'affixe z.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$.
   c) Construire dans le même repère le triangle ABC et A'B'C' son image par S^4.

EXERCICE 2

1) Les faces d'un dé cubique truqué sont numérotées : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6.
   On lance une fois ce dé. Chaque face a la même probabilité d'apparition. On note P_i la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4, P_6.
2) On lance deux fois de suite ce dé. Chaque face a toujours la même probabilité d'apparition.
   a) Calculer la probabilité de l'événement :
   A : « la somme de deux numéros apparus sur la face supérieure est égale à 4 lors de deux lancements de ce dé ».
   b) On note par X la variable aléatoire définie par la somme des numéros affichés lors de deux lancements de ce dé.
   - Donner la loi de probabilité de X.
   - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
3) On lance trois fois de suite et d'une manière indépendante ce dé. On note par Y la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face portant le numéro 2 lors de ces trois lancers.
   a) Donner la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer la variance $V(Y)$.

N.B : Mettre les résultats sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME

N.B : Les parties A et B sont indépendantes.

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x} + x - 1$.

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$.
   a) Etudier le sens de variation de g.
   b) En déduire le signe de $g(x)$.
2) Etudier les variations de f.
3) a) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.
   b) Démontrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation au voisinage de $+\infty$ qu'on nommera (D). On précisera la position de (C) par rapport à (D).
4) Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (D).
5) Tracer dans le même repère (D), (T) et (C).
6) Calculer en cm^2, l'aire géométrique du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
7) a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b) Calculer $f(1)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right)$ où f^{-1} est la fonction réciproque de f.
   c) Tracer dans le même repère que (C) la courbe (C') de f^{-1}.
   (On donne : $e = 2,7$; $\frac{1}{e} = 0,4$)

B. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $U_0 = 1$ et $U_n = 1 - \int_0^n e^{-x}dx$.

1) Calculer U_n en fonction de n.
2) Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

CORRIGE

EXERCICE 1

1) Soit P le polynôme à variable complexe z défini par : $P(z)=z^3-2z^2+(2+i)z-1-i$.

a) • $P(1)=1^3-2\cdot1^2+(2+i)1-1-i=1-2+2+i-1-i$

$P(1)=0$.

• $(1-2i)^2=1-4-4i=-3-4i$.

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$P(z)=z^3-2z^2+(2+i)z-1-i=0$

On factorise d'abord $P(z)$ sous la forme

$P(z)=(z-1)(z^2+\alpha z+\beta)$.

Utilisons la méthode de Hörner pour obtenir α et β.

	1	-2	$2+i$	$-1-i$
1		1	-1	$1+i$
	1	-1	$1+i$	0

On en déduit $\alpha=-1$ et $\beta=1+i$.

On résoud maintenant l'équation

$P(z)=(z-1)(z^2-z+1+i)=0$

$z-1=0$; $z=1$

ou $z^2-z+1+i=0$

$\Delta=-3-4i=(1-2i)^2$ d'après a)

$$z'=\frac{1-(1-2i)}{2}=i \quad ; \quad z''=\frac{1+(1-2i)}{2}=1-i$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$S=\{1,i,1-i\}$.

2) On considère les points $A[z_A=1]$; $B[z_B=1-i]$ et $C[z_C=i]$.

• Forme trigonométrique de $a=\frac{z_B}{z_C}$

$$a=\frac{z_B}{z_C}=\frac{1-i}{i}=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bullet\ a^4=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^4$$

$$a^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\times\frac{-3\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\times\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$$

$$a^4=4(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=-4.$$

3) Soit S la similitude plane directe qui transforme M en M' telle que $z'=(1-i)z+2i$; M' d'affixe z' et M d'affixe z..

a) Eléments caractéristiques de S :

Centre Ω : $z_\Omega=\frac{2i}{1-(1-i)}=2$

Rapport : $k=|1-i|=\sqrt{2}$

Angle θ : $\theta=\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$.

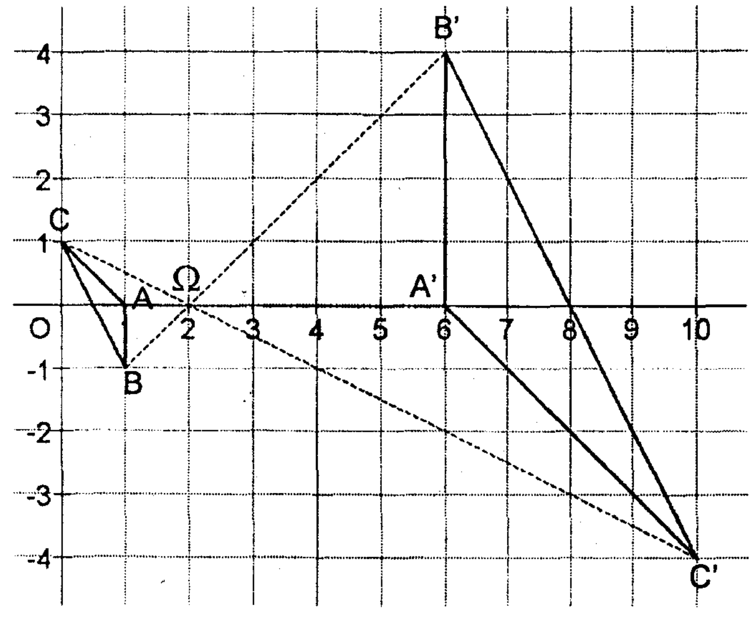
b) Nature et éléments caractéristiques de $S^4=SoSoSoS$.

Comme $S=\mathscr{S}\left(\Omega(z_\Omega=2);k=\sqrt{2};\theta=-\frac{\pi}{4}\right)$,

S^4 est la similitude plane directe de centre $\Omega(z_\Omega=2)$ de rapport $k'=\left(\sqrt{2}\right)^4=4$ et d'angle $\theta'=4\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\pi$

Autrement dit, S^4 est l'homthétie de centre $\Omega(z_\Omega=2)$ et de rapport -4.

c) Construction du triangle ABC et A'B'C' son image par S^4



EXERCICE 2

1) Les faces du dé sont numérotées :

1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6.

On lance une fois le dé.

Puisque chaque face a la même probabilité d'apparition on a :

$P_1=\frac{1}{6}$; $P_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $P_3=\frac{1}{6}$; $P_4=\frac{1}{6}$; $P_6=\frac{1}{6}$.

2) On lance deux fois de suite le dé.

a) Calcul de probabilité

A : « la somme de deux numéros apparus sur la face supérieure est égale à 4 lors de deux lancements de ce dé»

$$A=\{(1;3),(3;1),(2;2)\}$$

$$p(A)=P_1\cdot P_3+P_3\cdot P_1+P_2\cdot P_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

$$p(A)=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}.$$

b) Soit X la variable aléatoire définie par la somme des numéros affichés lors de deux lancements de ce dé.

D \ D	1	2	3	4	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,6)

L'univers image de X est

$X(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,12\}$.

- Loi de probabilité de X

$$P(X=2)=P_1\cdot P_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P(X=3)=P_1\cdot P_2+P_2\cdot P_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(X=4)=p(A)=\frac{1}{6}$$

$$P(X=5)=P_1\cdot P_4+P_2\cdot P_3+P_3\cdot P_2+P_4\cdot P_1$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

D'une façon analogue, on a :

$$P(X=6)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=7)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(X=8)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=9)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$P(X=10)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$P(X=12)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

x	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$

x	7	8	9	10	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

- Espérance mathématique $E(X)$ de X

$$E(X)=\frac{2}{36}+\frac{3}{9}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{30}{36}+\frac{7}{9}+\frac{40}{36}+\frac{9}{18}+\frac{10}{18}+\frac{12}{36}$$

$$E(X)=\frac{216}{36}=6.$$

3) On lance trois fois de suite et d'une manière indépendante le dé.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face portant le numéro 2 lors de ces trois lancers.

a) Loi de probabilité de Y

Y suit la loi binomiale de paramètres

$n=3$ et $p=P_2=\frac{1}{3}$.

Y a pour univers image $Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$.

Pour $k\in\{0,1,2,3\}$ $\quad P(Y=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$.

k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

b) Variance $V(Y)$ de Y

$$V(Y)=n\cdot p\cdot(1-p)=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

PROBLEME

A. 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=(1-x)e^{-x}+1$

a) Etude du sens de variation de g
$D_g=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$
La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$g'(x)=-e^{-x}+(1-x)\left(-e^{-x}\right)=(x-2)e^{-x}$.
Comme $e^{-x}>0$,
$g'(x)=0$ si et seulement si $x-2=0$, soit $x=2$
$g'(x)>0$ si et seulement si $x-2>0$, soit $x>2$
et $g'(x)<0$ si et seulement si $x-2<0$, soit $x<2$.
La fonction g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ et strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.
La fonction g admet un minimum absolu $g(2)$ en 2.

b) On déduit de la question précédente que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geq g(2)$. Or $g(2)=1-e^{-2}>0$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)>0$.

2) Etude des variations de f
$f(x)=xe^{-x}+x-1$
$D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+1=(1-x)e^{-x}+1=g(x)>0$
f est strictement croissante sur $\left]-\infty;+\infty\right[$.

3) a) Etude de la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{-x}+x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+\frac{x-1}{x}\right)=+\infty$$

(C) a une branche parabolique suivant l'axe $(O;y)$ au voisinage de $-\infty$.

b) • On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$.
Ainsi la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

• Positon de (C) par rapport à (D)
On étudie le signe de $f(x)-(x-1)=xe^{-x}$.
$f(x)-(x-1)$ a le même signe que x puisque $e^{-x}>0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$		$+$	0	$-$	

- Pour $x\in\left]-\infty;0\right[$: la courbe (C) est au-dessous de (D)
- Pour $x=0$: la courbe (C) coupe la droite (D)
- Pour $x\in\left]0;+\infty\right[$: la courbe (C) est au-dessus de (D)

4) Soit A un point de (C) d'abscisse x_A et (T) la tangente à (C) au point A.
(T) : $y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$
(D) : $y=x-1$
(T) est parallèle à (D) si et seulement si elles ont le même coefficient directeur
si et seulement si $f'(x_A)=1$
$g(x_A)=1$
$(1-x_A)e^{-x_A}+1=1$
$(1-x_A)e^{-x_A}=0$
$1-x_A=0$ car $e^{-x_A}\neq0$
donc $x_A=1$, par suite $y_A=e^{-1}$.
Il existe donc un point unique $A\left(1;e^{-1}\right)$ de (C) où la tangente (T) est parallèle à (D).

5) Tracés de (D), (T) et (C)

▸ *Voir au verso*

6) Calcul de l'aire géométrique $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$
Comme la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0;1]$, on a alors :

$$\mathcal{A}=\left(\int_0^1 f(x)-(x-1)\,dx\right)4\text{cm}^2$$
$$=\left(\int_0^1 xe^{-x}dx\right)4\text{cm}^2$$

Posons :

$u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$

$u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$

$$A = \left(\left[-xe^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx \right) 4cm^2$$

$$= \left(-e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \right) 4cm^2 = \left(1 - 2e^{-1}\right) 4cm^2$$

$$A = \left(4 - 8e^{-1}\right) cm^2.$$

7) a) On sait que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$ sur $J = f(]-\infty\,;+\infty[) =]-\infty\,;+\infty[$.

b) • $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

• $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{e}\right)\right)} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{1} = 1.$

c) La courbe (C') de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Voir le tracé de (C') *sur le graphique ci-dessous.*

B. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$U_0 = 1$ et $U_n = 1 - \int_0^n e^{-x}dx$

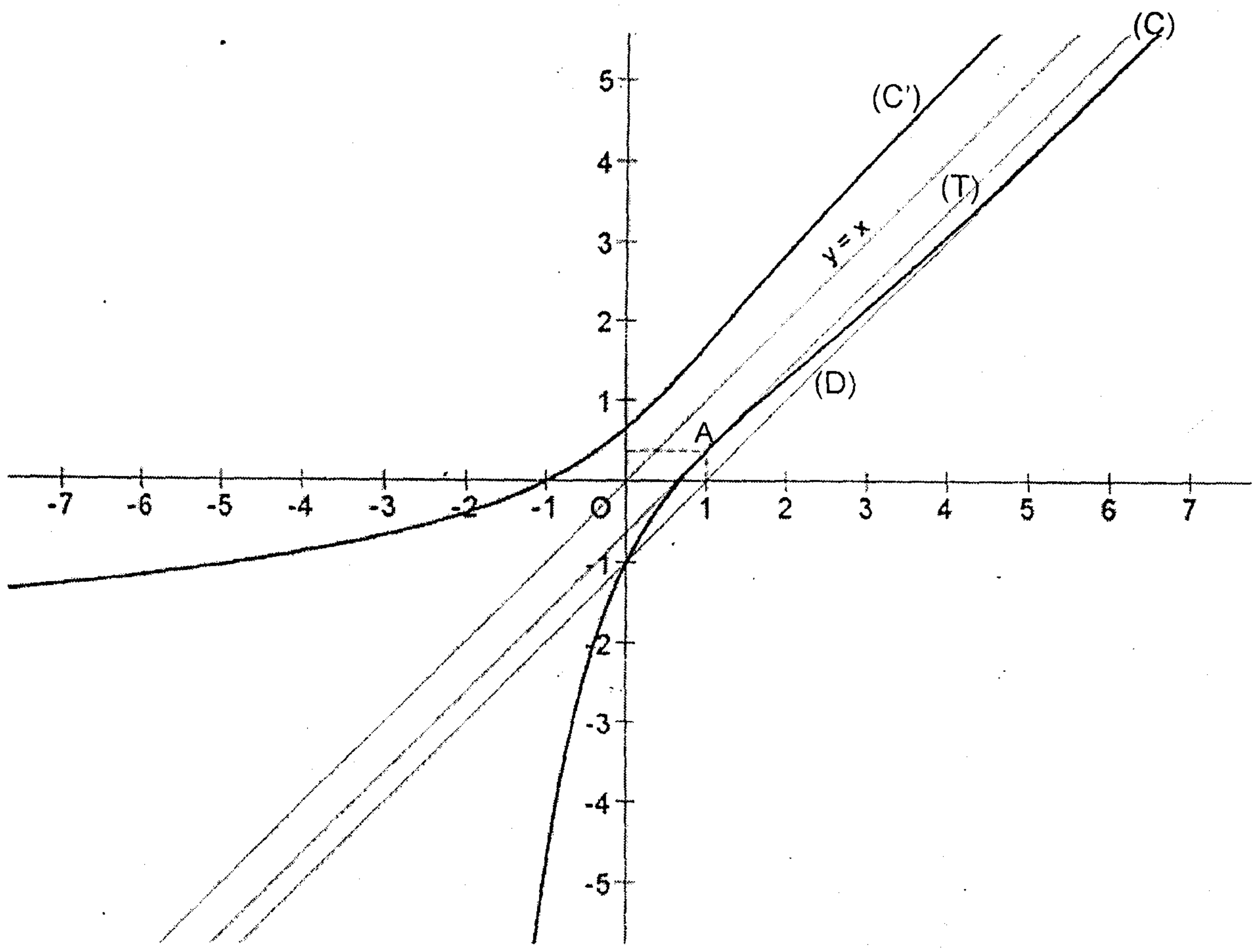
1) Calcul de U_n en fonction de n

$$U_n = 1 - \left[-e^{-x} \right]_0^n = 1 - \left(-e^{-n} + 1\right) = e^{-n}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$: $U_n = e^{-n} = \left(e^{-1}\right)^n$.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

5) Tracés de (D), (T), (C) et (C')



EXERCICE 1

1- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1): $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Préciser le module et un argument de chacune des solutions de (E_1).

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

(E_2): $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$ (on pourra poser $Z = -iz + 3i + 3$).

2- Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Donner la forme trigonométrique de $U = \dfrac{z_E - z_C}{z_E - z_A}$ avec E d'affixe $z_E = 3$.

c) En déduire la nature du triangle AEC.

3- On considère la transformation R du plan (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - 4 \end{cases}$$

a) Donner l'expression complexe de R.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de R.

c) Soit (Γ) le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.

Déterminer et construire l'image (Γ') de (Γ) par R dans le repère précédent.

EXERCICE 2

A- On dispose de deux urnes dont l'une U_1 contient 8 boules numérotées :

0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 et l'autre U_2 contient 5 boules numérotées : 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1- On tire au hasard et successivement sans remise 3 boules de l'urne U_1.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « Les numéros des 3 boules tirées sont pairs ».

E_2 : « Avoir 3 boules dont la somme des numéros tirés est égale à 6 ».

2- On tire au hasard et simultanément <u>2 boules de U_2 et 1 boule de U_1</u>.

On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro 2.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

B- Lors d'une épreuve facultative d'EPS, on donne pour 4 élèves les points bonus x_i obtenus en épreuve de « course de fond » et y_i obtenus en épreuve de « saut » :

x_i	1	2	5	7
y_i	2	2	4	5

1- Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Interpréter le résultat.

2- Déterminer, par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite de régression de y en x.

3- Estimer le bonus en épreuve de saut pour un élève ayant 9 points de bonus en course de fond.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1- Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

2- a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right] = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right] = -\infty$.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3- a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Pour $x \leq 0$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4- Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = e$.

5- a) Calculer $f\left(e^2\right)$.

b) Etudier les branches infinies de (C).

6- Tracer la tangente (T) et la courbe (C) en précisant les demi-tangentes au point O.

7- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [e; +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

c) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère que (C).

d) Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(e^2\right)$.

8- En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

On donne $e \simeq 2{,}7$ et $e^2 \simeq 7{,}4$.

CORRIGE

EXERCICE 1

1- a) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

(E_1) : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

$\Delta' = (-1)^2 - 2 = -1 = i^2$

$z' = 1+i$; $z'' = 1-i$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est

$S_1 = \{1+i ; 1-i\}$.

b) • Pour $z' = 1+i$, on a :

$|z'| = |1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg z' = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

• Pour $z'' = 1-i$, on a :

$|z''| = |1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg z'' = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$.

c) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

(E_2) : $(-iz+3i+3)^2 - 2(-iz+3i+3) + 2 = 0$

Posons $Z = -iz+3i+3$.

L'équation est équivalente à $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ avec $Z = -iz+3i+3$.

D'après la question 1 –a) précédente on a $Z_1 = 1+i$ et $Z_2 = 1-i$.

• Pour $Z_1 = 1+i = -iz+3i+3$, on en déduit

$z = \frac{-2-2i}{-i} = 2-2i$.

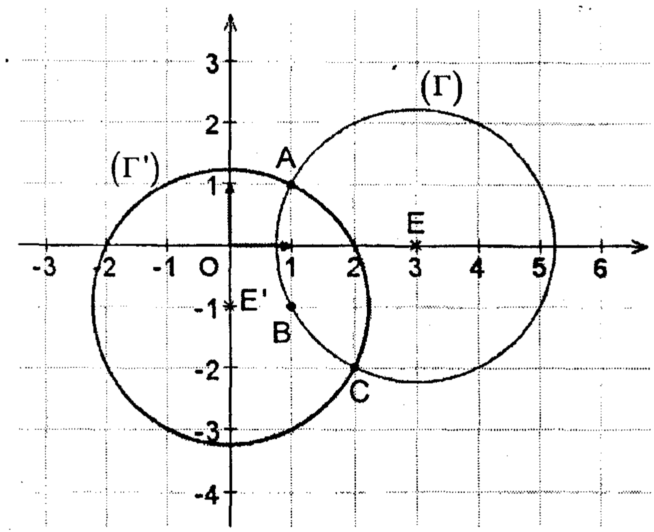
• Pour $Z_2 = 1-i = -iz+3i+3$, on en déduit

$z = \frac{-2-4i}{-i} = 4-2i$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est

$S_2 = \{2-2i ; 4-2i\}$.

2- a) Placement des points A, B et C.d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = 1-i$ et $z_C = 2-2i$.



b) Soit E le point d'affixe $z_E = 3$. On a

$$U = \frac{z_E - z_C}{z_E - z_A} = \frac{3-(2-2i)}{3-(1+i)} = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i$$

La forme trigonométrique de U est donc $U = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

c) Nature du triangle AEC.

Comme $U = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, on a $|U| = 1$ et $\arg U = \frac{\pi}{2}$

c'est-à-dire $\left|\frac{z_E - z_C}{z_E - z_A}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_E - z_C}{z_E - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

ou encore $CE = AE$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CE}}\right) = \frac{\pi}{2}$

On en déduit que AEC est un triangle isocèle et rectangle en E.

3- a) Expression complexe de R.

$M[z = x+iy] \mapsto M'[z' = x'+iy']$ tel que $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x-4 \end{cases}$.

$z' = x'+iy' = -y + i(x-4) = i(x+iy) - 4i = iz - 4i$

La forme complexe de R est $z' = iz - 4i$.

b) z' est de la forme $z' = az+b$ avec $a = i$ et $b = -4i$.

<u>Nature de R</u>

Comme $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = |i| = 1$, R est une rotation.

<u>Eléments caractéristiques de R</u>

Centre Ω : $z_\Omega = \frac{-4i}{1-i} = 2-2i = z_C$

Angle θ : $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

R est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Soit (Γ) le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.

L'image (Γ') de (Γ) par R est le cercle de centre $E' = R(E)$ et de rayon $\sqrt{5}$. On a $z_{E'} = 3i - 4i = -i$.

Voir (Γ') et (Γ) sur la figure ci-contre.

EXERCICE 2

A- 1- On tire au hasard et successivement sans remise 3 boules de l'urne U_1 : 0; 2; 2; 2; 3; 3; 4; 5.

Calcul de probabilités

E_1 : « Les numéros des 3 boules tirées sont pairs » se traduit par « tirer 3 boules numérotées paires parmi 5 »

$$P(E_1) = \frac{A_5^3}{A_8^3} = \frac{5\times4\times3}{8\times7\times6} = \frac{5}{28}.$$

E_2 : « Avoir 3 boules dont la somme des numéros tirés est égale à 6 » se traduit par
« Avoir les numéros 2 ; 2 ; 2 »
ou « avoir les numéros 0 ; 2 ; 4 pris dans le désordre »
ou « avoir les numéros 0 ; 3 ; 3 pris dans le désordre »

$$P(E_2) = \frac{A_3^3 + 6\ A_1^1 A_3^1 A_1^1 + 3\ A_1^1 A_2^2}{A_8^3} = \frac{6+18+6}{8\times7\times6} = \frac{5}{56}.$$

2- Urne U_2 : 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2.

On tire au hasard et simultanément 2 boules de U_2 et 1 boule de U_1.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro 2.

a) Loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

• $(X=0)$: « Obtenir aucune boule portant le numéro 2 »

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_5^2 \times C_8^1} = \frac{3\times5}{10\times8} = \frac{15}{80}$$

• $(X=1)$: « Obtenir 1 boule portant le numéro 2 de U_2 et 1 boule non numérotée 2 de U_2 et 1 boule non numérotée 2 de U_1 » ou « obtenir 2 boules non numérotées 2 de U_2 et 1 boule portant le numéro 2 de U_1 »

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_3^1}{C_5^2 \times C_8^1} = \frac{2\times3\times5 + 3\times3}{10\times8} = \frac{39}{80}$$

• $(X=2)$: « Obtenir 2 boules portant le numéro 2 de U_2 et 1 boule non numérotée 2 de U_1 » ou « obtenir 1 boule portant le numéro 2 de U_2 et 1 boule non numérotée 2 de U_2 et 1 boule portant le numéro 2 de U_1 »

$$P(X=1) = \frac{C_2^2 \times C_5^1 + C_2^1 C_3^1 \times C_3^1}{C_5^2 \times C_8^1} = \frac{1\times5 + 2\times3\times3}{10\times8} = \frac{23}{80}$$

• $(X=3)$: « Obtenir 2 boules portant le numéro 2 de U_2 et 1 boule portant le numéro 2 de U_1 »

$$P(X=1) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^2 \times C_8^1} = \frac{1\times3}{10\times8} = \frac{3}{80}$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{15}{80}$	$\frac{39}{80}$	$\frac{23}{80}$	$\frac{3}{80}$

b) Espérance mathématique $E(X)$ de X.

$$E(X) = 0\times\frac{15}{80} + 1\times\frac{39}{80} + 2\times\frac{23}{80} + 3\times\frac{3}{80} = \frac{94}{80} = \frac{47}{40}.$$

B- 1- Calcul du coefficient de corrélation linéaire.

$$\bar{x} = \frac{1+2+5+7}{4} = 3{,}75$$

$$\bar{y} = \frac{2+2+4+5}{4} = 3{,}25$$

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	1	2	1	4	2
	2	2	4	4	4
	5	4	25	16	20
	7	5	49	25	35
Σ	15	13	79	49	61

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$Cov(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_i y_i) - (\bar{x}\cdot\bar{y}) = \frac{61}{4} - (3{,}75)\cdot(3{,}25) = 3{,}06$$

$$V(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{79}{4} - (3{,}75)^2 = 5{,}69$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{5{,}69} = 2{,}38$$

$$V(y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{49}{4} - (3{,}25)^2 = 1{,}68$$

$$\sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{1{,}68} = 1{,}30$$

$$\text{D'où } r = \frac{3{,}06}{(2{,}38)\cdot(1{,}30)} = 0{,}99.$$

La corrélation est très forte entre les points bonus obtenus en épreuve de « course de fond » et les points bonus obtenus en épreuve de « saut ».
On peut donc effectuer un ajustement affine entre y et x par la méthode des moindres carrés.

2- Equation de la droite (D) de régression de y en x.

$(D):\ y = ax + b$ où

$a = \dfrac{Cov(x,y)}{V(x)} = \dfrac{3,06}{5,69} \simeq 0,54$

(D) passe par le point moyen G(3,75 ; 3,25)

$b = 3,25 - (0,54)\cdot(3,75) \simeq 1,23$

$(D):\ y = 0,54x + 1,23$.

3- $(D):\ y = 0,54x + 1,23$

9 points de bonus en course de fond correspond à $x = 9$.

$y = 0,54 \times 9 + 1,23 = 6,09$

Si un élève a 9 points de bonus en course de fond alors le bonus en épreuve de saut est estimé à 6 points.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - e^x & \text{si } x \le 0 \\ f(x) = x(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1- Etude de la continuité de f en $x_0 = 0$.

Comme $0 \le 0$, on a $f(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 - e^x\right) = 0 = f(0).$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(-1+\ln x) = \lim_{x\to 0^+}(-x + x\ln x) = 0 + 0 = 0 = f(0)$$

f est à la fois continue à gauche et continue à droite en $x_0 = 0$, f est donc continue en $x_0 = 0$.

2- a) • $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right] = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = -1.$$

Donc $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right] = -1.$

• $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{x(-1+\ln x)}{x}$.

$$= \lim_{x\to 0^+}(-1+\ln x) = -\infty$$

Donc $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right] = -\infty$.

b) La courbe (C) admet en son point d'abscisse 0, un demi-tangente à gauche (T^-) de coefficient directeur et une demi-tangente verticale à droite (T^+).

c) • $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(1 - e^x\right) = 1$.

• $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x(-1+\ln x) = +\infty$.

3- a) Pour $x > 0$, on a :

• $f'(x) = -1 + \ln x + x\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x$.

• $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$

$f'(x) < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$

b) Pour $x \le 0$, on a $f'(x) = -e^x < 0$.

c) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		−	-1 ‖ $-\infty$	−	0	+	
f(x)	1	↘	0	↘	-1	↗	$+\infty$

4- Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = e$.

$(T) : y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$f(e) = e(-1 + \ln e) = 0$ et $f'(e) = \ln e = 1$

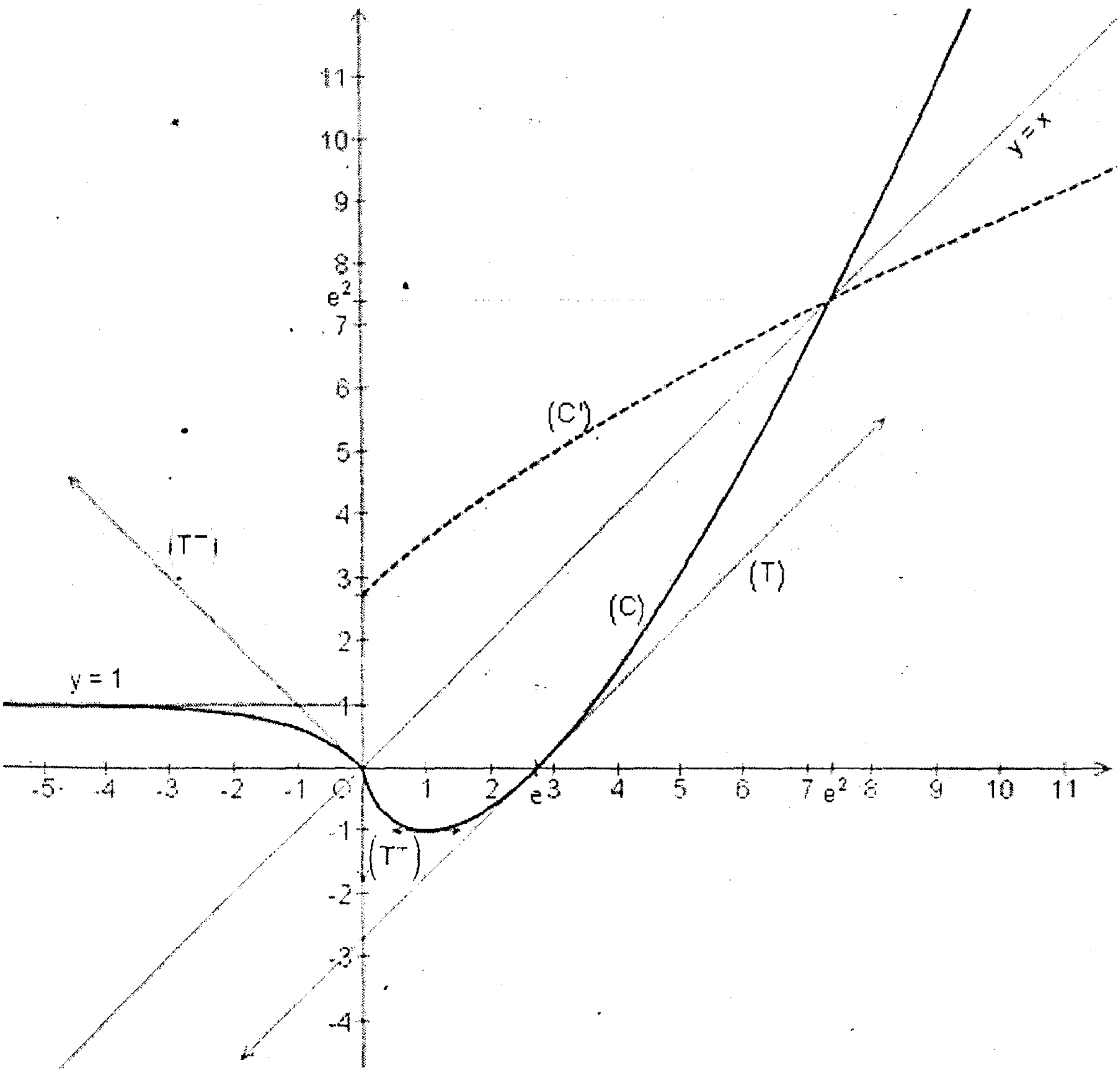
D'où $(T) : y = x - e$.

5- a) On a $f\left(e^2\right) = e^2\left(-1 + \ln e^2\right) = e^2(-1 + 2\ln e) = e^2$

b) Etude des branches infinies de (C).

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$: Lorsque $x \to -\infty$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (C).
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + \ln x) = +\infty$: Lorsque $x \to +\infty$, la courbe (C) a une branche parabolique suivant l'axe (Oy).

6-Tracés de la tangente (T) et de la courbe (C)



7- a) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [e; +\infty[$.

D'après les variations de f, la fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [e; +\infty[$.

La fonction g est donc une bijection de $I = [e; +\infty[$ sur $g([e; +\infty[) = [0; +\infty[$. Il en résulte que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g([e; +\infty[) = [0; +\infty[$.

b) Comme les fonctions g et g^{-1} varient dans le même sens, le tableau de variation de g^{-1} est :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$+$
$g^{-1}(x)$	$e \nearrow +\infty$

c) La courbe (C') de g^{-1} est le symétrique de celle de g par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Voir le tracé de (C') sur la figure précédente.

d) On sait que $g(e^2) = f(e^2) = e^2$, soit $g^{-1}(e^2) = e^2$.

$$(g^{-1})'(e^2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(e^2))} = \frac{1}{g'(e^2)} = \frac{1}{f'(e^2)}$$

$$= \frac{1}{\ln e^2} = \frac{1}{2}.$$

8- Aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

$$A = \left(\int_e^{e^2} f(x)dx\right)cm^2 = \left(\int_e^{e^2} x(-1+\ln x)dx\right)cm^2$$

Procédons par parties.

Posons $u'(x) = x$ et $v(x) = -1+\ln x$

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$A = \left(\left[\frac{1}{2}x^2(-1+\ln x)\right]_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} x dx\right)cm^2$$

$$A = \left(\left[\frac{1}{2}x^2(-1+\ln x)\right]_e^{e^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2}\right)cm^2$$

$$A = \left(\left[\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{3}{2}+\ln x\right)\right]_e^{e^2}\right)cm^2$$

$$A = \left(\frac{e^4+e^2}{4}\right)cm^2 \simeq 15{,}54\, cm^2.$$

----------oooOooo---------